

MAY 1 - 1935

ZEITSCHRIFT FÜR PHYSIK

HERAUSGEGEBEN UNTER MITWIRKUNG
DER
DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

VON
KARL SCHEEL

94. BAND. 5. UND 6. HEFT

MIT 51 TEXTFIGUREN

(ABGESCHLOSSEN AM 2. APRIL 1935)



VERLAG VON JULIUS SPRINGER, BERLIN

1935

erscheint zwanglos in einzelnen Heften; 12 Hefte bilden einen Band.

Die Zeitschrift für Physik ist durch jede Buchhandlung sowie durch die Verlagsbuchhandlung Julius Springer, Berlin W.9, Linkstraße 23/24, zu beziehen. Die Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft erhalten die Zeitschrift für Physik zu einem mit dem Vorstände der Gesellschaft vereinbarten Vorzugspreis geliefert.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich. Weitere 75 Exemplare werden, falls bei Rücksendung der 1. Korrektur bestellt, gegen eine angemessene Entschädigung geliefert. Darüber hinaus gewünschte Exemplare müssen zum gleichen Preise berechnet werden, den die Arbeit im Heft kostet, da die umfangreiche Versendung von Sonderdrucken den Absatz der Zeitschrift schädigt. Dissertationsexemplare werden von der Verlagsbuchhandlung grundsätzlich nicht geliefert.

Autorkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen werden, soweit sie 10% der Satzkosten übersteigen, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Manuskriptsendungen sind zu richten an Herrn Geh. Reg.-Rat Professor Dr. Karl Scheel, Berlin-Dahlem, Werderstraße 23.

94. Band

Inhalt

5. und 6. Heft

	Seite
F. Preisach , Über die magnetische Nachwirkung. (Mitteilung aus dem Zentral-laboratorium des Wernerwerkes der Siemens & Halske A.-G.). Mit 13 Ab-bildungen. (Eingegangen am 15. Februar 1935)	277
M. Ackemann , Ein neuer Sekundäreffekt der kosmischen Ultrastrahlung. Mit 14 Abbildungen. (Eingegangen am 9. Februar 1935)	303
Walter Glaser , Zur Theorie des idealen Gases. (Eingegangen am 14. Februar 1935)	317
R. Wallauschek und P. Bergmann , Zur Theorie des Elektronenmikroskops mit Anwendung auf rein magnetische Felder. Mit 6 Abbildungen. (Einge-gangen am 14. Februar 1935)	329
O. Brandt und H. Freund , Über die Aggregation von Aerosolen mittels Schall- wellen. Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 15. Februar 1935) . . .	348
A. Recknagel , Die Streuabsorption der Elektronenstrahlen. (Aus dem Forschungs-Institut der AEG.). (Eingegangen am 20. Februar 1935) . .	356
Ehrhard Hellmig , Berechnung optischer Terme mit Hilfe des statistischen Potentials von Fermi. Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 22. Februar 1935)	361
Philip Haglund , Präzisionsmessung des $K\alpha_{1,2}$ -Dubletts einiger der leichteren Elemente. (Eingegangen am 24. Februar 1935)	369
V. Njegovan , Worin bestehen die angeblichen Unzulänglichkeiten des Nernst- schen Wärmethorems? (Eingegangen am 15. Februar 1935)	377
R. Schmid und L. Gerö , Über den Zeeman-Effekt der Störungsstellen des $A^1\Pi$ -Zustandes in CO. (Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Königl. Ungarischen Universität für technische und Wirtschaftswissen- schaften.). Mit 3 Abbildungen. (Eingegangen am 16. Februar 1935) . .	386
R. Kollath , Zur Entstehung von Protonen bei der Beschießung von Palladium mit Elektronen. (Aus dem Forschungsinstitut der AEG.). Mit 7 Abbil- dungen. (Eingegangen am 20. Februar 1935)	397
L. Frank , Über die Berechnung der Dampfdrucke wässriger Lösungen. (Ein- gegangen am 30. Januar 1935)	408
J. Ghosh , Über die Einsteinschen Gravitationsgleichungen. (Eingegangen am 21. Januar 1935)	411

(Mitteilung aus dem Zentrallaboratorium des Wernerwerkes der Siemens & Halske A.-G.)

Über die magnetische Nachwirkung.

Von **F. Preisach** in Berlin-Siemensstadt.

Mit 13 Abbildungen. (Eingegangen am 15. Februar 1935.)

I. Diskussion der bisherigen Erfahrungen über die Zeitabhängigkeit der Magnetisierung. Hypothese einer formalen Analogie zwischen der Jordanschen Verlustkomponente und dem dielektrischen Nachwirkungsverlust. — II. Grundlegende Versuche, die auf Grund der klassischen Theorie zur Prüfung dieser Hypothese möglich sind. — III. Messung der Frequenzabhängigkeit der Permeabilität. Größenordnungsmäßige Bestätigung der Theorie. — IV. Ausführung des Schaltversuchs an einem Band- und an einem Massekern einer FeNi-Legierung. Ungültigkeit des Superpositionsprinzips. — V. Deutung der Versuchsergebnisse.

1. Einleitung.

Es ist schon häufig die Frage gestellt worden, ob bei ferromagnetischen Stoffen die Magnetisierung der Feldstärke trägheitslos folgt, oder ob zur Entstehung einer bestimmten Magnetisierung eine endliche Zeit notwendig sei. Zur Beantwortung der Frage sind schon zahlreiche verschiedenartige Versuche angestellt worden, ohne endgültige Lösung des Problems.

Bei einer Art von Untersuchungen wird die nach plötzlichem Einschalten eines Gleichfeldes sich einstellende Magnetisierung zeitlich registriert („Schaltversuch“). Die andere wichtige Untersuchungsmethode besteht in der Beobachtung des magnetischen Verhaltens in Abhängigkeit von der Frequenz eines Wechselfeldes („Wechselstromversuch“). Bei beiden Methoden muß die Rückwirkung der Wirbelströme auf das magnetisierende Feld berücksichtigt werden, um die physikalisch interessierende Frage beantworten zu können, nämlich die Frage der Verzögerung der Magnetisierung gegenüber der an einem bestimmten Ort tatsächlich herrschenden Feldstärke.

Die Hochfrequenzgrenze. Bei Untersuchung der Induktivität und des Energieverlustes von Eisendrähten bei Hochfrequenz ist die Berücksichtigung der Wirbelstromeffekte am bequemsten möglich. Derartige Untersuchungen¹⁾ ergaben, daß bei kleinen Feldstärken die ferromagnetische

¹⁾ Neuere Messungen mit ungedämpften Wellen: B. Hoag u. H. Jones, Phys. Rev. **42**, 571, 1934; R. Sängner, Helv. Phys. Acta **5**, 478, 1934; vgl. auch W. Arkadiew, Phys. Rev. **43**, 671, 1933.

Permeabilität bei der Frequenz $\sim 10^{10}$ Hertz verschwindet. Es ist noch nicht entschieden, ob dieses Aufhören des ferromagnetischen Verhaltens an eine kritische *Zeit* oder an eine kritische *Länge* (Eindringtiefe) gebunden ist. (Es wird bei den in Frage kommenden Versuchskörpern infolge der Wirbelströme nur noch eine dünne Haut von $\sim 10^{-5}$ cm ummagnetisiert.)

Aus diesen Versuchen ist zu schließen, daß der wesentlich merkbare Teil der reversiblen magnetischen Vorgänge sich für Beobachtungen, deren Zeitmaßstab groß gegen 10^{-10} sec ist, praktisch trägheitsfrei einstellen wird.

Schaltversuche. Es deuten jedoch eine Anzahl von experimentellen Arbeiten darauf hin, daß bei dem Schaltversuch Verzögerungserscheinungen beobachtet werden können, die nicht in einfacher Weise durch Wirbelstromeinflüsse erklärt werden können. Insbesondere geht dies schon aus den klassischen Beobachtungen Ewings hervor, der nach 60 Minuten noch eine geringe, aber durch ein Magnetometer meßbare Zunahme der Magnetisierung beobachtete, obzwar rechnerisch die Zeitkonstante der Wirbelstromabklingvorgänge in der Größenordnung von nur 0,02 sec liegt¹⁾.

Aus den in der Literatur befindlichen Angaben über „Schaltversuche“ ist im allgemeinen zu schließen, daß die beobachtete Verzögerung des *größten Teiles* der Induktionsänderung durch den *wirbelstrommäßig* verzögerten Feldaufbau erklärlich ist. *Nur ein kleiner Bruchteil der Magnetisierung ist mit „Nachwirkung“ behaftet.*

Insbesondere hat Bozorth mit Hilfe einer Näherungsrechnung gezeigt²⁾, daß die experimentellen Ergebnisse von Lapp³⁾ — der sehr ausführlich die zeitliche Entstehung der Induktion bei Eisen an verschiedenen Stellen der Hysteresisschleife beobachtet hat — befriedigend durch Wirbelstromeffekte erklärt werden können. Ähnliches dürfte auch von den meisten Arbeiten gelten, die sich mit der allmählichen Entstehung der Induktion beim Schaltversuch beschäftigen⁴⁾. Infolge der Krümmung der Magnetisierungskurve werden die Verhältnisse beim Schalten starker Felder verwickelt, aber die rechnerische Abschätzung zeigt meist, daß nur ein kleiner Bruchteil der Induktionsänderung so lange Verzögerungszeiten aufweist, daß diese nicht in einfacher Weise auf eine Wirkung der Wirbelströme zurückgeführt werden können.

Es sei hier noch bemerkt, daß es eine andere Art von magnetischer Verzögerung gibt, die bei gewissen Temperaturen auftreten kann, die aber

¹⁾ A. Ewing, Die magnetische Induktion. Berlin, Jul. Springer 1892. — ²⁾ R. M. Bozorth, Phys. Rev. **32**, 125, 1928. — ³⁾ Ch. Lapp, Ann. de phys. (10) **8**, 278, 1927. — ⁴⁾ Z. B. auch H. Kühlewein, Phys. ZS. **32** 472, 1931.

mit der hier gestellten physikalischen Frage nichts gemeinsam hat. Manche magnetischen Stoffe verändern nämlich ihre Magnetisierungsschleife infolge einer Behandlung im Magnetfeld bei Temperaturen über 400° infolge des Ausgleiches innerer Materialspannungen magnetostriktiver Herkunft¹⁾. Die zeitliche Veränderung der Magnetisierbarkeit als Folge der Wirkung des Meßfeldes täuscht dann eine verzögerte Einstellung der Induktion vor. Diese Erscheinung ist von Kühlewein beobachtet und auch in ähnlichem Sinne gedeutet worden²⁾. Wir möchten diese Erscheinungen aus dem Begriff der „magnetischen Nachwirkung“ ausschließen.

Genaue Wechselstromversuche bei mittleren Frequenzen sprechen ebenfalls für das Vorhandensein einer echten Nachwirkung, die schon tief unter der erwähnten Hochfrequenzgrenze ($\sim 10^{10}$ Hertz) zur Geltung kommt. Durch näherungsweise Berücksichtigung des Wirbelstromfeldes konnte gezeigt werden³⁾, daß die mit Wechselstrom gemessene Hysteresisschleife größere Fläche hat als die ballistisch ermittelte.

Jordanscher Nachwirkungsverlust. Diese Erfahrungstatsachen dürften Jordan⁴⁾ unterstützt haben zur Aufstellung seiner Hypothese einer magnetischen Nachwirkung zur Deutung einer Beobachtung bei genauen Verlustmessungen an eisenhaltigen Spulen mit Wechselstrom. Die Phasenverschiebung ε zwischen den Grundfrequenzen des Magnetisierungsstromes und der magnetischen Induktion (damit auch der Verlustwinkel der gemessenen Induktivität) läßt sich für kleine Feldstärken und kleine Frequenzen nach Jordan empirisch darstellen als:

$$\varepsilon = \varepsilon_n + \varepsilon_h \cdot \frac{H}{H_0} + \varepsilon_w \cdot \frac{\omega}{\omega_0}, \quad (1a)$$

$$= \frac{n}{5000} + \frac{h}{5000} \cdot H + \frac{w}{5000} \cdot \frac{\omega}{5000}. \quad (1b)$$

Das mit der Kreisfrequenz ω ansteigende Glied erklärt sich quantitativ durch Wirbelstromverluste und läßt sich bei Blechen und Drähten leicht berechnen. Die frequenzunabhängigen Glieder könnten an und für sich als Hystereseverluste angesprochen werden. Nun haben die klassischen Untersuchungen Rayleighs über die Hysterese bei kleinen Feldstärken ergeben, daß die Schleifen durch ähnliche und ähnlich gelegene Parabelbögen dargestellt werden können. Dies hat zur Folge, daß der Energie-

¹⁾ R. M. Bozorth, Phys. Rev. **46**, 232, 1934. — ²⁾ H. Kühlewein, Phys. ZS. **32**, 862, 1931. — ³⁾ W. Neumann, ZS. f. Phys. **51**, 355, 1928; E. A. Neumann, ebenda **83**, 619, 1933. — ⁴⁾ H. Jordan, Elektr. Nachrichtentechnik **1**, 7, 1924.

verlust mit der dritten, die Phasenverschiebung also mit der ersten Potenz der Feldstärke anwachsen muß. Nach Jordan wäre demzufolge bloß das zweite Glied der Formel (1) als „Hysteresese“ zu deuten, dagegen das erste Glied, welches einen frequenz- und feldstärkenunabhängigen Phasenwinkel darstellt, als Folge einer magnetischen Nachwirkung.

Die Deutung einer derartigen frequenzunabhängigen Phasenverschiebung als Folge einer zeitlichen Verzögerung der Induktion war von Jordan vorgeschlagen worden auf Grund einer Analogie mit Erfahrungen über elastische und über dielektrische Nachwirkung. Diese Erfahrungen zeigen, daß eine derartige auf inneren Verzögerungserscheinungen beruhende Phasenverschiebung häufig in einem großen Frequenzgebiet sich als konstant erweist, wenn auch prinzipiell ein Abfall für extrem niedrige und extrem hohe Frequenzen erwartet werden muß.

Die Erklärung der *dielektrischen* Nachwirkung besteht in der Annahme örtlich verstreuter elektrisch leitender Teilchen im Dielektrikum. Zum Verständnis der *elastischen* Nachwirkung wird die Existenz rein plastischer Gebiete angenommen, welche in einer elastischen Umgebung fließen können. Der Umstand, daß es magnetisch kein Analogon zur elektrischen Leitfähigkeit bzw. zum plastischen Fließen gibt, war mit ein Grund dafür, daß die Annahme der Analogie im magnetischen Fall im Sinne Jordans angezweifelt wurde¹⁾.

Insbesondere war ein Zweifel über die Richtigkeit dieser Deutung solange berechtigt, als eine gleichzeitige quasistatische Bestimmung der Hysteresisschleifen bei hinreichend kleinen Amplituden zur Kontrolle des Rayleighschen Gesetzes nicht durchgeführt worden war. Neuerdings zeigten nun die empfindlichen ballistischen Messungen von Wittke und von Ellwood²⁾ die annähernde Richtigkeit des Rayleighschen Gesetzes in dem Sinne, daß die bei kleinen Feldstärken vorherrschende Jordansche Verlustenergie durch ballistische Messungen nicht aufzufinden ist. Auch weitere Erfahrungen über die „Auffrischeeffekte“ (siehe später) wie auch das Fehlen der Oberschwingungen bei kleinen Amplituden stützen die Hypothese Jordans³⁾.

Es scheint also zweckmäßig zu sein, als Arbeitshypothese die formale Analogie zur elastischen und zur dielektrischen Nachwirkung anzunehmen,

¹⁾ Vgl. die Diskussionsbemerkungen: Fachberichte der 34. Jahresversammlung des VDE. in Aachen 1927; siehe auch den Beitrag von R. Gans in „Leipziger Vorträge 1933“. Leipzig, S. Hirzel, 1933. — ²⁾ H. Wittke, Ann. d. Phys. (5) **20**, 106, 1934; E. Ellwood, Phys. Rev. **45**, 743, 1934. — ³⁾ Vgl. E. A. Neumann, ZS. f. Phys. **89**, 308, 1934.

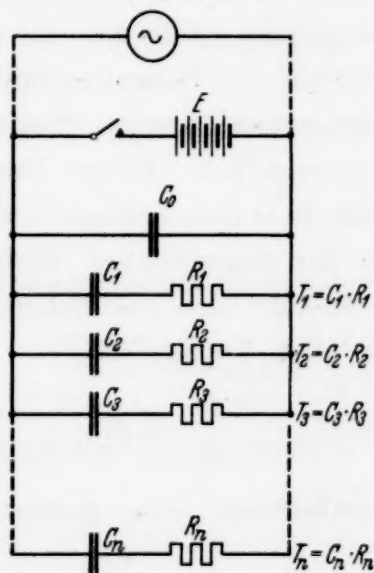
um durch die daraus sich ergebenden weiteren Versuche die Richtigkeit dieser Annahme prüfen zu können.

II. Die Theorie und die Grundversuche der dielektrischen und der elastischen Nachwirkung.

Es sei kurz der wesentliche Inhalt der klassischen Theorien der dielektrischen und elastischen Nachwirkung angedeutet mit Hinblick auf die wichtigsten zur Prüfung dienenden Versuche im Sinne der Arbeiten von Wiechert, Wagner und Becker¹⁾. Die Beschreibung ist in einfacher Weise an dem Beispiel der dielektrischen Nachwirkung möglich, weil diese bequem auf Grund eines einfachen Ersatzschemas (Abb. 1a) behandelt werden kann.

Es wird angenommen, daß nur ein kleiner Bruchteil K des Materials Nachwirkungserscheinungen aufweist. Beim Schaltversuch folgt der größte Teil der Ladung der angelegten Spannung momentan, nur der kleine Bruch-

teil K stellt sich verzögert ein. Die in Fig. 1b gezeichnete Verzögerungsfunktion $\psi(t)$ kann allgemein aus Exponentialfunktionen verschiedener



a) Ersatzschema für einen Kondensator mit dielektrischer Nachwirkung.

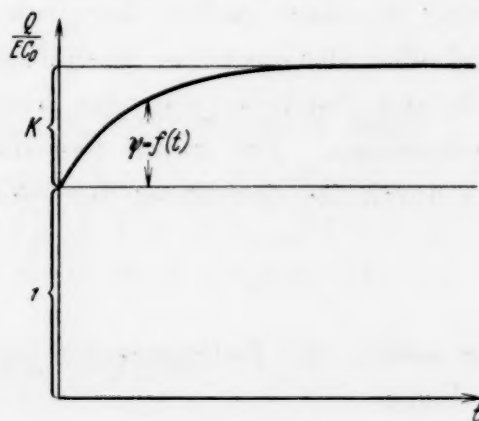


Fig. 1.

b) Die Verzögerungsfunktion.

Zeitkonstanten zusammengesetzt gedacht werden (der nachwirkende Anteil K ist übertrieben groß gezeichnet). Im Ersatzschema Fig. 1a läßt sich dies wiedergeben durch eine Anzahl von Parallelstromzweigen, bestehend aus der Reihenschaltung verschiedener Widerstände und Kondensatoren,

¹⁾ Elastische Nachwirkung: E. Wiechert, Wied. Ann. **50**, 334, 1893; R. Becker, ZS. f. Phys. **33**, 185, 1925. Dielektrische Nachwirkung: K. W. Wagner, Ann. d. Phys. (4) **40**, 817, 1913.

die alle dem Hauptkondensator C_0 parallelgeschaltet sind. Die scheinbare Kapazität eines derartigen Netzwerkes für Wechselstrom muß mit steigender Frequenz monoton von $C_0(1 + K)$ auf C_0 abnehmen. Gleichzeitig wird die Phasenverschiebung (der scheinbare Verlustwinkel) ein Maximum bei derjenigen Frequenz durchlaufen, deren Reziprokwert eine Art mittlere Zeitkonstante der Parallelkreise bedeutet.

Durch geeignet gewählte Parallelkreise der Fig. 1a lassen sich alle praktisch durch Schalt- und Wechselstromversuche beobachteten Nachwirkungsvorgänge darstellen. Wagner konnte speziell durch Annahme einer Gaußschen Verteilung um eine wahrscheinlichste Zeitkonstante T_0 die Beschreibung der empirisch bekannten Kurven des Schaltversuchs auf drei Konstanten zurückführen (auf den Gesamtbetrag des nachwirkenden Anteils K , die häufigste Zeitkonstante T_0 und das Maß für die Schärfe der Gruppierung b).

Es gibt nun eine ganz spezielle einfache Art der Verteilung der Zeitkonstanten, welche in der Natur sowohl bei der dielektrischen, besonders aber bei der elastischen Nachwirkung oft weitgehend erfüllt ist. Sie ergibt beim Schaltversuch einen logarithmischen Verlauf der Belastungsfunktion, und beim Wechselstromversuch eine frequenzunabhängige Phasenverschiebung in einem großen Zeit- bzw. Frequenzgebiet. Dieser Grenzfall ist es offenbar, der uns näher beschäftigen muß, da er eine Analogie bedeutet zum Befund Jordans über das Verhalten der magnetischen Stoffe bei Wechselströmen. Für diesen Grenzfall vereinfacht sich das Schema der Fig. 1a durch die Bedingung der Gleichheit aller Kapazitäten:

$$C_1 = C_2 = C_3 = \dots = C_n = C, \quad \frac{C}{C_0} = \beta.$$

Ferner sollen die Zeitkonstanten der Parallelkreise eine geometrische Reihe bilden

$$T_K = T_{K-1} \cdot e.$$

Dies entspricht einem Grenzfall der Wagnerschen Darstellung ($b = 0$), bei welchem eine gleichwahrscheinliche Verteilung der Logarithmen der Zeitkonstanten über ein großes Zeitgebiet angenommen wird.

Eine einfache mathematische Beschreibung finden wir, wenn wir nach Becker¹⁾ annehmen, die Parallelkreise würden für kleine und große Zeitkonstanten begrenzt durch eine minimale bzw. maximale Zeitkonstante T_{\min} bzw. T_{\max} .

¹⁾ Siehe Fußnote auf voriger Seite.

Es folgt

$$\frac{T_{\max}}{T_{\min}} = e^n$$

und

$$K = \frac{n \cdot C}{C_0} = \beta \ln \frac{T_{\max}}{T_{\min}}. \quad (2)$$

Die Rechnung ergibt für die Belastungsfunktion¹⁾

$$\psi(t) = K + \beta \left\{ Ei\left(\frac{-t}{T_{\max}}\right) - Ei\left(\frac{-t}{T_{\min}}\right) \right\}. \quad (3)$$

Die transzendente „Ei-Funktion“ dient bloß zur Beschreibung der Ausgleichsvorgänge für $t \approx T_{\min}$ und $t \approx T_{\max}$ und ist experimentell meist nicht kontrollierbar. Im mittleren Zeitgebiet $t \gg T_{\min}$ und $t \ll T_{\max}$ gilt

$$\psi(t) = \text{const} + \beta \ln t. \quad (3a)$$

Die Lösung für Wechselstrom ergibt für die Phasenverschiebung ε :

$$\text{tg } \varepsilon = \beta \left[\frac{\pi}{2} - \text{arctg} \frac{1}{\omega T_{\max}} - \text{arctg} \omega T_{\min} \right]. \quad (4)$$

Für das mittlere Frequenzgebiet $\omega \cdot T_{\max} \gg 1$ und $\omega \cdot T_{\min} \ll 1$ speziell:

$$\text{tg } \varepsilon = \beta \frac{\pi}{2}. \quad (4a)$$

Die Frequenzabhängigkeit der Kapazität wird dargestellt durch

$$C = C_0 \left[1 + \frac{\beta}{2} \right] \ln \left[\left(\frac{T_{\max}}{T_{\min}} \right)^2 \frac{1 + (\omega T_{\min})^2}{1 + (\omega T_{\max})^2} \right]. \quad (5)$$

Im mittleren Frequenzgebiet

$$\frac{\Delta C}{C} = \text{const.} - \beta \ln \omega. \quad (5a)$$

Im Falle daß die Nachwirkung dem hier angeführten Modell gehorcht, müssen nach Gleichungen (3a), (4a) und (5a) drei verschiedene Beobachtungen auf die gleiche Konstante β zurückzuführen sein: 1. die zeitliche Verzögerung beim Schaltversuch, 2. die Größe der Phasenverschiebung und 3. die Änderung der Kapazität (bzw. bei Magnetika der Induktivität) mit der Frequenz beim Wechselstromversuch.

¹⁾ Bei R. Becker (siehe vorstehende Fußnote) ist $T_{\max} = 1/r$, $T_{\min} = 1/R$. Die Formeln (3), (4) und (5) sind insofern allgemeiner als die in der Abhandlung von R. Becker explizite mitgeteilten, als sie auch für lange Zeiten bzw. kleine Frequenzen gelten.

Eine direkte Prüfung des — für die ganze Theorie grundlegenden — Superpositionsprinzips ist möglich durch einen „Ein- und Wiederausschaltversuch“. Wird nämlich während der Zeit τ eingeschaltet, so kann die nachher beobachtbare zeitliche Änderung dargestellt werden als

$$\psi_{EA}(t) = \beta \ln \left(1 + \frac{\tau}{t} \right). \quad (6)$$

Dieser Versuch ergibt eine schärfere und aufschlußreichere Prüfung der Grundlagen der Theorie als der Vergleich, der aus den verschiedenen Beobachtungen entnommenen Konstanten β . Im Falle der magnetischen Nachwirkung hat bisher allein Tobusch¹⁾ einen Zeitverlauf beobachten können, der qualitativ der Wiechertschen Theorie entspricht. Er gibt aber keine Absolutwerte an; ein Vergleich mit den Erfahrungen des — seitdem häufig durchgeführten — Wechselstromversuchs ist selbst größenordnungsmäßig nicht durchführbar.

Eine Frequenzabhängigkeit der Induktivität beobachtete in einem Fall Herrmann²⁾ bei extrem tiefen Frequenzen an einer besonderen Eisensorte. Gleichzeitig trat aber ein anomal großer Verlustwinkel in engem Frequenzgebiet auf. Es lag also hier nicht der charakteristische frequenzunabhängige Verlustwinkel Jordans vor.

Es wurde meines Wissens noch nicht versucht, gleichzeitig mit der Feststellung des Jordanschen Verlustwinkels ε_n entweder aus genauen Induktivitätsmessungen bei Wechselstrom oder aus Schaltversuchen die für die Nachwirkungstheorie wesentliche Größe β auf einem anderen Wege festzustellen. Einige hierauf bezüglichen Versuche, die keinen Anspruch auf Vollständigkeit haben können³⁾, seien hier mitgeteilt.

III. Messung der Frequenzabhängigkeit der Induktivität infolge magnetischer Nachwirkung.

Die Frequenzabhängigkeit der Induktivität eisenhaltiger Spulen ist gewöhnlich bedingt durch die Wirbelstrom-Flußverdrängung und durch die der Selbstinduktion praktisch immer parallelgeschaltete Spulenkapazität.

Der Einfluß der Wirbelströme, der in einer Verminderung der Induktivität besteht, läßt sich durch die von Wolman⁴⁾ definierte Grenzfrequenz f_g kennzeichnen, die Wirkung der dielektrischen Ladeströme, die

¹⁾ W. Tobusch, Dissertation Göttingen 1908. — ²⁾ P. C. Herrmann, ZS. f. Phys. **84**, 565, 1933. — ³⁾ Der Verfasser hat die Versuche aus äußeren Gründen vorzeitig abgeschlossen. — ⁴⁾ W. Wolman, ZS. f. techn. Phys. **10**, 595, 1929.

eine Erhöhung der Induktivität vortäuscht, durch die Resonanzfrequenz f_r der Spule.

Es gilt dann (für $f \ll f_g$ und $f \ll f_r$)

$$\begin{aligned} \frac{L_f}{L_0} &= 1 - \frac{8}{15} \left(\frac{f}{f_g} \right)^2 + \left(\frac{f}{f_r} \right)^2 \\ &= 1 + \left(\frac{f}{f_r} \right)^2 \left[1 - \frac{8}{15} \left(\frac{f_r}{f_g} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Da bei den Spulen, die für Präzisionsmessungen im Tonfrequenzgebiet verwandt werden, $f_r \ll f_g$ ist, kann die Wirkung der Wirbelströme meist vernachlässigt werden.

Dann ist bei gleichzeitigem Vorhandensein einer Nachwirkung entsprechend Gleichungen (5a) und (7) zu erwarten:

$$\frac{L_f}{L_0} = \text{const} - \beta \ln f + \left(\frac{f}{f_r} \right)^2. \quad (8)$$

Zur graphischen Auswertung ist diese Funktion zweckmäßiger darstellbar als

$$\frac{f}{L_0} \frac{dL_f}{df} = -\beta + 2 \left(\frac{f}{f_r} \right)^2. \quad (8a)$$

Es folgt unmittelbar, daß die Frequenzkurve der Induktivität ein Minimum besitzen muß bei

$$f_{\min} = f_r \sqrt{\frac{\beta}{2}} = f_r \sqrt{\frac{\text{tg } \epsilon_n}{\pi}}.$$

Bei den üblichen verlustarmen magnetischen Kernen liegt ϵ_n in der Größenordnung $2 \dots 20 \cdot 10^{-4}$. Das Minimum der Induktivität ist also bei $1 \dots 2\%$ der Resonanzfrequenz zu erwarten. Daraus und aus der zu erwartenden Kleinheit des Effektes ergeben sich die notwendigen experimentellen Maßnahmen zu dessen Auffindung.

Die wesentliche Schwierigkeit bei der Durchführung der Versuche besteht in der Stromabhängigkeit der Induktivität. Die praktisch notwendigen Meßströme beeinflussen die Größe der Induktivität viel stärker als die Variation der Meßfrequenz.

Nach sorgfältiger Extrapolation auf die Stromstärke Null ergab sich für das Beispiel eines Massekernes aus einer Eisennickellegierung die Induktivitätskurve der Fig. 2a. Die Darstellung nach Gleichung (8a) als gerade Linie wird in Fig. 2b gezeigt. Es wird hierdurch festgestellt $\beta_L = 0,9 \cdot 10^{-3}$. Die gleichzeitig ausgeführte Bestimmung des Verlustwinkels ergab $\epsilon_n = 2,4 \cdot 10^{-3}$, folglich nach Gleichung (4a) $\beta_\epsilon = 1,5 \cdot 10^{-3}$. Der Versuch ergibt also die theoretisch erwartete Größenordnung für die

Induktivitätsänderung wieder. Eine genauere zahlenmäßige Übereinstimmung ist auch bei anderen Messungen an Band- und Massekernen nicht gelungen. Ob die Abweichung durch eine unzureichende Meßgenauigkeit erklärt werden kann, müßte durch weitere Verfeinerung der Wechselstrommeßmethoden bei tieferen Frequenzen entschieden werden. Das

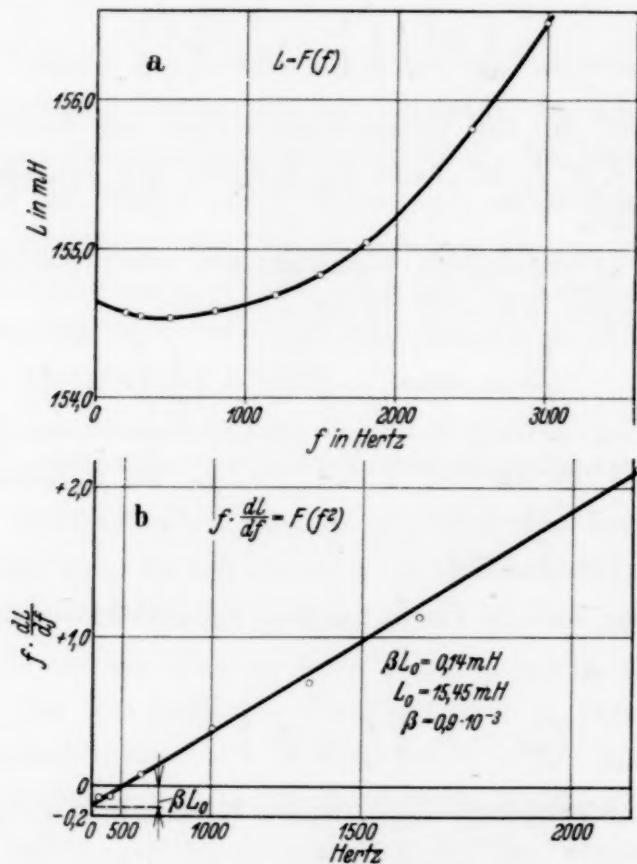


Fig. 2.

- a) Frequenzabhängigkeit der Induktivität eines Massekernes auf Strom = 0 extrapoliert.
b) Zerlegung in Nachwirkungsanteil und Anteil der Ladeströme der Spulenkapazität.

beschriebene Meßergebnis unterstützt zweifellos — wenn auch nur qualitativ — die Deutung des Jordanschen Verlustes als zeitlicher Nachwirkung.

IV. Ausführung des Schaltversuchs.

Die zeitliche Entstehung der Induktion läßt sich ballistisch dadurch verfolgen, daß man das ballistische Galvanometer erst nach einer bestimmten Zeit t in den Sekundärkreis einschaltet. Infolge der endlichen Schwingungsdauer des Galvanometers (die Ausschlagzeit betrug ≈ 10 sec) wird allerdings nicht der gesamte nach der Zeit t nachfolgende Induktionsanteil gemessen, sondern bloß derjenige Bruchteil von ihm, der in einem Zeitraum von der Größenordnung der Ausschlagzeit zur Wirkung kommt. Die experimentell

ermittelten Nachwirkungskurven bedeuten also die Größe $B_{nE} = B_{TG} - B_t$ (siehe Fig. 3), wenn T_G eine für das Galvanometer kennzeichnende Zeit (\approx Schwingungsdauer) bedeutet. Da aber, wie die Abbildungen zeigen werden, die beobachteten Kurven durchweg logarithmisch verlaufen, wird die einzig beobachtbare Zahlengröße [entsprechend Gleichung (3a)] immer noch richtig feststellbar sein.

Zur Erzielung ausreichender Empfindlichkeit wurden Ringspulen mit großem Eisenvolumen benutzt und eine große Zahl von Sekundärwindungen angebracht. (Für den Wechselstromversuch mußte die Wicklung anders dimensioniert werden.) Zur Herstellung der verschiedenen Schaltzeiten wurde eine Nockenwelle mit sechs Nocken benutzt, die von einem Motor mit Vorgelege

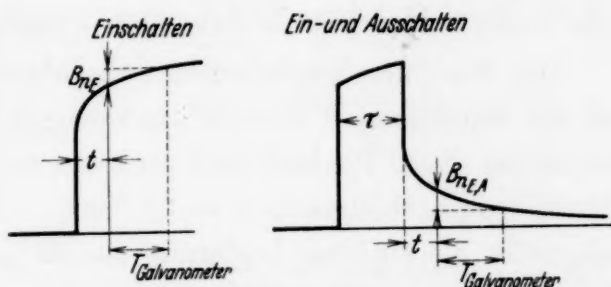


Fig. 3. Schema der Schaltversuche.

angetrieben wurde mit großem Variationsbereich für die Drehzahl. Bei dem *Einschaltversuch* wird die Zeit t (vgl. Fig. 3) bestimmt durch den Winkel zwischen der Nocke, welche das Umschlagrelais für den Magnetisierungsstrom, und der Nocke, welche das Umschlagrelais des Galvanometerkreises betätigt. Die Einschaltdauer τ des „*Ein- und Ausschaltversuchs*“ ist durch die Breite derjenigen Nocke bedingt, während deren Kontaktgabe der Magnetisierungsstromkreis geschlossen ist. Die Eichung der Zeiten wurde mit Hilfe des Oszillographen durchgeführt und von Zeit zu Zeit kontrolliert. (Da die Ansprechzeiten der Relais besonders gemessen worden sind, genügte meist eine Eichung bei einer einzigen Drehzahl.) Bei dauerndem Lauf der Nockenwelle wurde für jeden Versuchspunkt durch Einschalten eines besonderen Schalters jeweils die Tätigkeit der anderen Schaltelemente ermöglicht.

Fehlerquellen. Durch Benutzung einer großen Sekundärwindungszahl fällt infolge der Spulenkapazität die Eigenfrequenz der Sekundärspule verhältnismäßig klein aus. Die Folge ist ein Ausgleichvorgang im kapazitiv belasteten Sekundärkreis beim Schalten. Der Vorgang muß bei der Beobachtungszeit t hinreichend abgeklungen sein, damit er die geringen Nachwirkungseffekte nicht überdeckt. Die geringste Abklingzeit konnte erreicht werden durch aperiodische Dämpfung des Sekundärkreises mit Hilfe eines Parallelwiderstandes (von mehreren hunderttausend Ohm).

Die Begrenzung der experimentell zugänglichen Beobachtungszeiten t nach kleinen Werten wurde durch die erwähnten Ausgleichsvorgänge bedingt. (Die Zeitkonstante des Primärkreises konnte immer ausreichend klein gehalten werden.) Ein Fehler war leicht zu vermeiden, da der Fehlausschlag exponentiell von der Zeit abhängt im Gegensatz zu dem logarithmischen Charakter der Nachwirkung. Es konnte der Fehler infolge eines Ausgleichsvorganges leicht experimentell kontrolliert werden durch Verminderung des Sekundärwiderstandes, wodurch die Zeitkonstante des Sekundärkreises künstlich erhöht wird. Die Resonanzfrequenz bewegte sich bei verschiedenen Meßobjekten zwischen 200 und 1200 Hertz.

Die für die Wirbelströme charakteristische Verzögerungszeit war bei den untersuchten Kernen um mehrere Größenordnungen geringer und konnte bei dieser Beobachtung gar nicht zur Geltung kommen (maßgebende Wirbelstromzeitkonstante¹⁾ $\approx 10^{-6}$ sec). Es seien hier die Ergebnisse mitgeteilt, die an einer Legierung aus 40% Ni und 60% Fe in Form eines Bandkernes bzw. eines Massekernes gewonnen worden sind.

Messungen an dem Bandkern. Der Ringkern wurde gewickelt aus einem Band von 0,035 mm Stärke und 15 mm Breite. Der Querschnitt betrug 2,8 cm². Das Material wurde im aufgewickelten Zustand gegläht und dann vorsichtig mit einer Zwischenisolation aus Papier umwickelt. Dadurch konnten die Einflüsse der Wirbelströme weitgehend vermieden werden. Die magnetischen Messungen ergaben für den fertigen Kern: Anfangspermeabilität $\mu_0 = 1000$, Koerzitivkraft $H_c = 1,5$ Ørsted, Remanenz 7000 Gauß. Die Wechselstromverlustwerte entsprechend der Jordanschen Zerlegung [Gleichung (1b)] waren $h = 5200$, $w = 6$ (entspricht der Wolmanskens Grenzfrequenz $f_g = 0,45 \cdot 10^6$), $n = 16$ (d. h. $\epsilon_n = 3,2 \cdot 10^{-3}$, $\beta_{\sim} = 2 \cdot 10^{-3}$). Diejenige Feldstärke, für welche die Hystereseverluste den Nachwirkungsverlusten gleichkommen, beträgt bloß $H_{ch.} = 0,005$ Ørsted.

Der *Einschaltversuch* wurde so durchgeführt, daß das Feld periodisch 1 Minute auf $+H$, dann nach einer Pause von 1 Minute auf $-H$ geschaltet wurde. Es wurde bei beiden Stromrichtungen beobachtet und der Mittelwert gebildet. Für Versuche mit kleinen Feldstärken enthielt die Sekundärwicklung 30000 Windungen mit einer Resonanzfrequenz von 200 Hertz, für die Versuche mit großen Feldstärken wurden bloß 8000 Windungen angebracht, die Resonanzfrequenz stieg dann auf 1200 Hertz.

Für die kleinsten verwandten Feldstärken sind die Ergebnisse in Fig. 4 dargestellt. Es war aus Empfindlichkeitsgründen nicht möglich, mit der

¹⁾ Vgl. W. Wolman u. H. Kaden, ZS. f. techn. Phys. **13**, 330, 1932.

Feldstärke bis zur Größenordnung der charakteristischen Feldstärke von $H_{ch.} = 0,0050$ rsted herunterzugehen. Der Umstand, daß dies bei den Beobachtungen an dem Massekern (siehe unten) möglich war (dort erstreckten sich die Messungen von $H = H_{ch.}$ bis $H = 20 H_{ch.}$) ohne auffallende Amplitudenabhängigkeit der Resultate, berechtigt zur Annahme, daß auch hier eine Extrapolation zu noch kleineren Feldstärken zulässig ist.

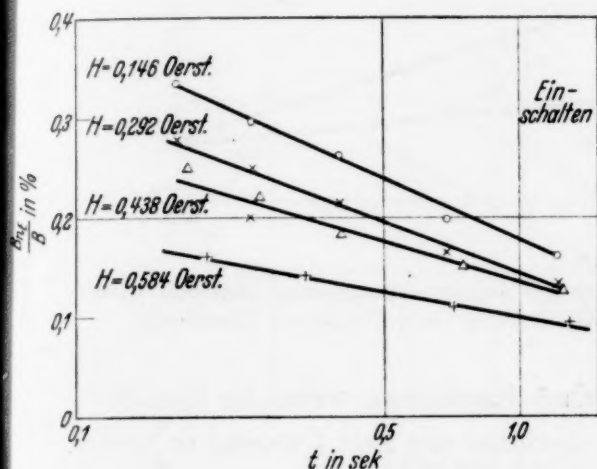


Fig. 4. Einschaltversuch für kleine Feldstärken. Eisennickel-Bandkern.

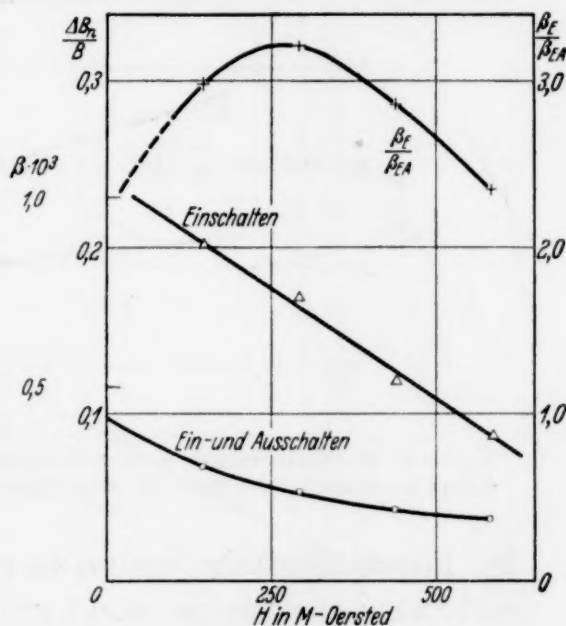


Fig. 5. Feldstärkenabhängigkeit der Kurvenneigung aus den Fig. 4 bzw. 7 für den Einschalt- bzw. Ein- und Ausschaltversuch (Bandkern).

Die auf die Einschaltinduktion bezogene Nachwirkungsinduktion B_{nE} wurde in Fig. 4 als Ordinate aufgetragen (der Wert der Einschaltinduktion ist durch eine besondere Messung festgestellt worden). Die Meßpunkte streuen durchweg um gerade Linien bei Verwendung eines logarithmischen Abszissenmaßstabes. In Fig. 5 ist die Abhängigkeit der Neigung dieser Geraden von der Feldstärke aufgetragen. Außer der bequem ablesbaren Größe

$$\frac{\Delta B_n}{B} = \frac{B_{n_{10t}} - B_{n_t}}{B_{Ein}}$$

(Änderung des Prozentualwertes bei Verzehnfachung der Zeit) ist noch der β -Maßstab mit angegeben, d. h. die Prozentualänderung bei e -facher Beobachtungszeit. Der so erhaltene β_E -Wert ist $1 \cdot 10^{-3}$, beträgt also die Hälfte des aus dem Wechselstromversuch ermittelten β_{\sim} -Wertes.

Auch hier erhalten wir — wie bei der Induktivitätsänderung — die Größenordnung wieder, die nach der Nachwirkungstheorie erwartet wird,

aber keine zahlenmäßige Übereinstimmung. In Fig. 6 ist in Kurve *b* ein von der üblichen Versuchsmethode (Kurve *a*) abweichender Fall dargestellt, bei welchem der Strom immer nur mit gleichem Vorzeichen eingeschaltet wurde und nicht — wie sonst — zwischen zwei Beobachtungen umgepolt wurde. (Selbstverständlich wurde der zugehörige Induktionsbezugswert besonders ermittelt.) Es ergibt sich nahezu die Hälfte der Kurvenneigung.

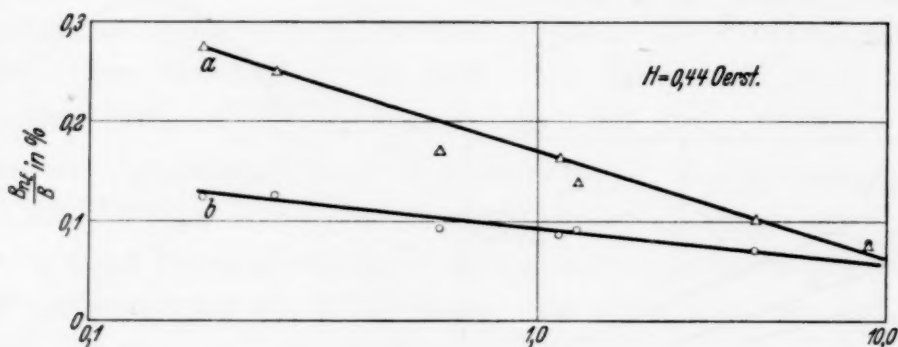


Fig. 6.

Kurve *a*: Einschaltversuch, wenn zwischendurch der Magnetisierungsstrom umgepolt wird.
Kurve *b*: Einschaltversuch bei einseitiger Aussteuerung ohne Umpolung (Bandkern).

Die Einschaltversuche ergaben die gleichen Ergebnisse, wenn die Einschalt- und Pausezeiten (welche immer groß gegenüber der Zeit t waren) in weiten Grenzen verändert wurden.

Der *Ein- und Ausschaltversuch* ergab ein überraschendes Resultat, das nicht im Rahmen der Superpositionstheorie der Nachwirkung einzuordnen ist. In Fig. 7a ist die Nachwirkungsfunktion B_{EA}/B aufgetragen in Abhängigkeit von dem Verhältnis t/τ (vgl. Fig. 3). Nach Gleichung (6) müßte entsprechend der Theorie für $t/\tau > 1$ ein hyperbolischer Abfall auftreten, und die Kurven mit verschiedenem τ müßten zusammenfallen. Im Gegensatz dazu werden parallele gerade Linien beobachtet. Trägt man dagegen in Abhängigkeit von der Beobachtungszeit t auf (Fig. 7b), so liegen die zu verschiedenen Einschaltzeiten τ gehörigen Meßpunkte streng an einer und derselben geraden Linie.

Das Abklingen der Induktion nach dem Ausschalten ist demnach von der Einschaltzeit unabhängig. Dieses empirische Ergebnis des Ein- und Ausschaltversuchs kann also auch durch eine Zahlenkonstante, durch die Neigung der logarithmischen Geraden, gekennzeichnet werden. (Der Schnittpunkt unserer experimentellen geraden Linien mit der Abszissenachse ist physikalisch uninteressant, er ist durch die Schwingungsdauer des ballistischen Galvanometers bedingt). Die Amplitudenabhängigkeit dieser Konstanten β_{EA} ist analog zu dem Ergebnis des Einschaltversuchs

ebenfalls in Fig. 5 eingetragen. Das Verhältnis der beiden Neigungen β_E/β_{EA} ist auch in Fig. 5 dargestellt. Die Extrapolation für kleine Feldstärken ist nicht ganz sicher. Das Verhältnis scheint sich der Zahl 2 zu nähern.

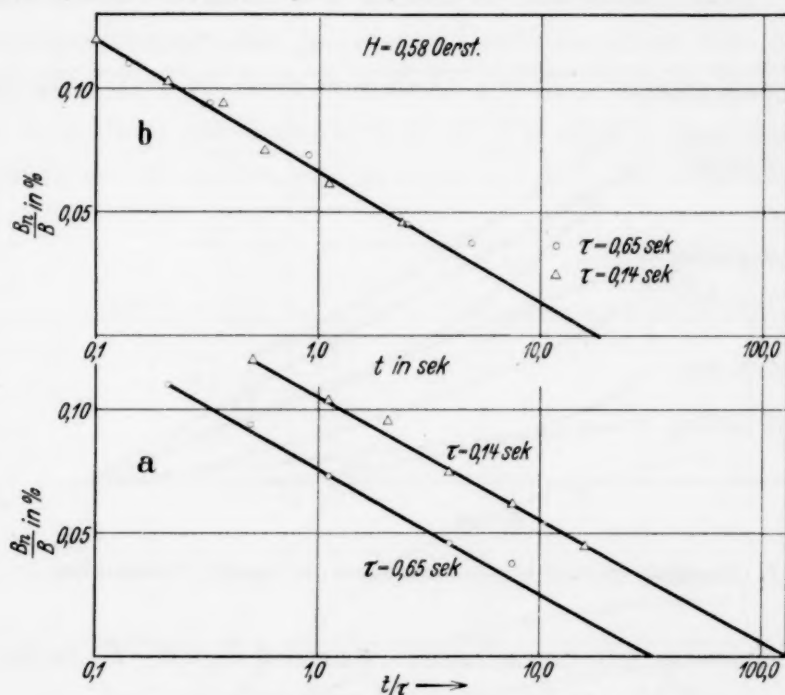


Fig. 7. Ein- und Ausschaltversuch an dem Bandkern.

- a) Darstellung in Abhängigkeit vom Verhältnis Beobachtungszeit zu Einschaltzeit,
b) Darstellung in Abhängigkeit von der Beobachtungszeit t .

Dieses Ergebnis kann in Übereinstimmung mit dem erwähnten Befund beim Einschaltversuch (Kurven a und b in Fig. 6) folgendermaßen formuliert

werden: Bei einer Stromzeitkurve von der Form $\square\square\square\square$ sind die

Nachwirkungskurven bei dem Einschalten und bei dem Ausschalten einander gleich und von der Schaltzeit unabhängig. Bei einer Stromzeit-

kurve der Form $\square\square\square\square$ ist die Unabhängigkeit von der Schaltzeit

auch erfüllt, aber die Größe β der logarithmischen Abklingkurve ist beim Einschalten doppelt so groß wie beim Ausschalten. Ob dieser Befund bei Extrapolation auf Amplituden unter H_{ch} noch richtig ist, konnte experimentell nicht geprüft werden.

Die Ausdehnung des Einschaltversuchs auf große Feldstärken zeigt Fig. 8. Hier ist der Absolutwert der Nachwirkungsinduktion als Ordinate aufgetragen. Für Feldstärken, die größer sind als die Koerzitivkraft, setzt eine Krümmung der geraden Linien ein. Die Nachwirkung nimmt

für $H > 7$ Oersted praktisch bis Null ab. In der Fig. 9 ist der Wert der Nachwirkungsinduktion für 0,1 und 1 sec aufgetragen. Außerdem ist noch die Neigung der Kurven für die Zeit 1 sec gestrichelt eingetragen. Auffallend ist es, daß die Nachwirkungskurven erst bei höheren Feldstärken abklingen

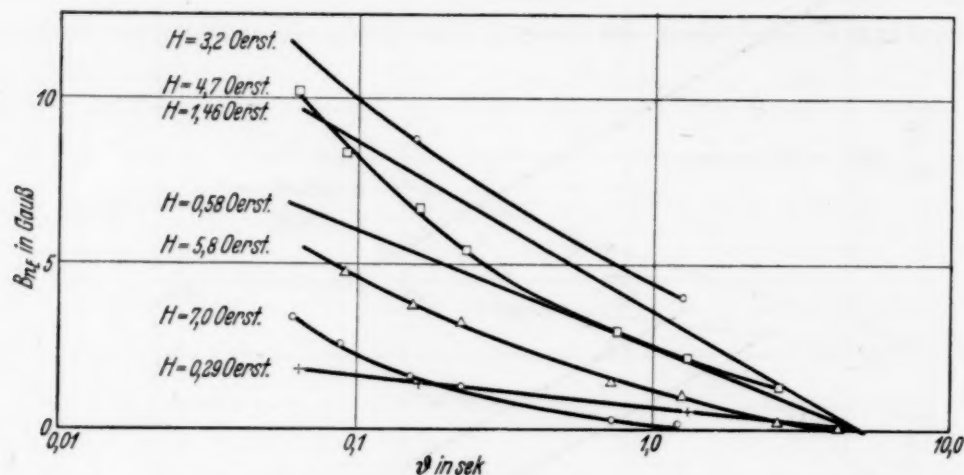


Fig. 8. Einschaltversuch an dem Bandkern bei großen Feldstärken.

als die vergleichsweise miteingezeichnete Kurve dB_r/dH (B_r bedeutet die Remanenz der jeweils bis zur Feldstärke H angesteuerten Schleife). Fig. 10

zeigt noch die zugehörigen gewöhnlichen ballistischen Messungen zur Kennzeichnung der magnetischen Eigenschaften des Kerns.

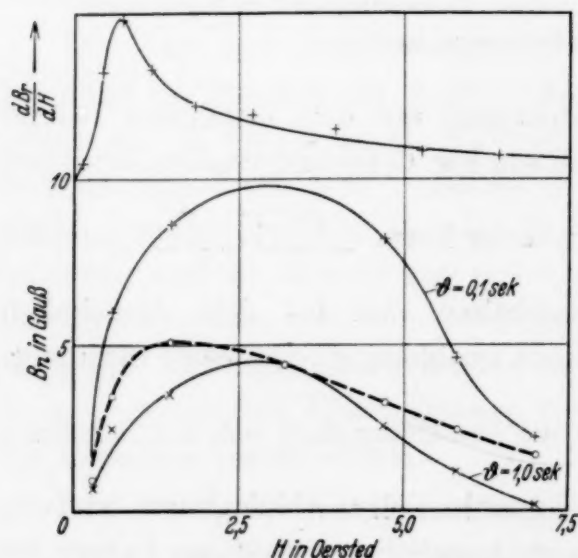


Fig. 9. Darstellung des Ergebnisses der Fig. 8 in Abhängigkeit von der Feldstärke.

Der Massekern. Aus dem Pulver der gleichen Legierung 40% Ni, 60% Fe wurde ein Massekern gepreßt. Die scheinbare Permeabilität sinkt infolge der Isolation der einzelnen Metallkörner stark ab. Es wurde gemessen $\mu_0 = 56$, $h = 46$, $w = 1,6$. Die Nachwirkungsgrößen waren $n = 9,6$,

$\varepsilon_n = 1,9 \cdot 10^{-3}$, $\beta_{\sim} = 1,2 \cdot 10^{-3}$. Die Feldstärke, für welche Hysteresis- und Nachwirkungsverluste gleich werden, berechnet sich daraus zu $H_{ch.} = 0,3$ Oersted. Der Kernquerschnitt betrug 9 cm^2 ; es wurden 30000 Sekundärwindungen benutzt.

Die Messungen zwischen 0,2 und 6 Ørsted ergaben qualitativ übereinstimmende und auch quantitativ wenig veränderliche Ergebnisse in der Darstellungsart der Fig. 11. Bei dem Ein- und Ausschaltversuch wird gegenüber dem Bandkern eine merkliche Krümmung festgestellt. Die von der Superpositionstheorie geforderte Unabhängigkeit von τ bei der Darstellung als $f(t/\tau)$ ist auch hier nicht erfüllt, obgleich die Einschaltkurve (Fig. 11 b) sauber logarithmisch verläuft. Für lange Zeiten laufen die Kurven in parallele gerade Linien aus, ähnlich wie bei dem Bandkern. Immerhin

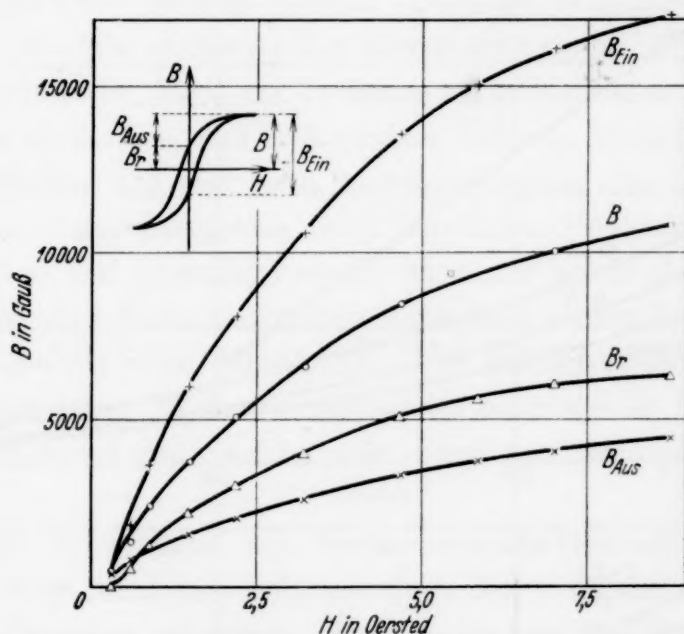


Fig. 10. Feldstärkenabhängigkeit verschiedener Induktionswerte, die bei dem Schaltversuch von Interesse sind.

ist auch die Abweichung von dem Verhalten des Bandkernes sehr deutlich bei der Darstellung der Kurven (in Fig. 11 b) in Abhängigkeit von t . Während die Kurven des Bandkernes zusammenfallen, erhalten wir hier eine Abweichung im Sinne der Erwartungen der Superpositionstheorie. Für große Zeiten scheinen jedoch die Kurven auch hier zusammenzulaufen.

Es ist möglich, die Kurven zu zerlegen in einen Anteil, der der klassischen Superpositionstheorie entspricht, und einen Anteil, der dem Befund des Bandkernes entspricht. Der zweite Anteil (gestrichelt gezeichnet für $\tau = 37,5$) ergibt in unserer Darstellung eine gerade Linie, der Rest (punktiert eingetragen) läßt sich als die Funktion $\beta \ln(1 + t/\tau)$ [entsprechend Gleichung (6)] nachweisen.

Es erweist sich von dem Wert $\beta_E = 10,2 \cdot 10^{-3}$ der Anteil $\beta_s = 3,9 \cdot 10^{-3}$ als superponierbar. Der Rest $\beta_m = \beta_E - \beta_s = 6,3 \cdot 10^{-3}$ wäre die charakteristische magnetische Nachwirkung. Der logarithmisch auslaufende

Teil des Ein- und Ausschaltversuchs ergibt $\beta_{EA} = 3,1 \cdot 10^{-3}$, also die Hälfte von β_m analog zum Befund bei dem Bandkern. Es ist naheliegend, als Erklärung anzunehmen, daß die Nachwirkung des Massekernes zweierlei Ursachen hat. Die eine ist magnetischer Natur und gehorcht den gleichen Gesetzen wie die an dem Bandkern beobachtete Nachwirkung. Die andere ist eine zusätzliche Erscheinung und gehorcht dem Superpositionsprinzip.

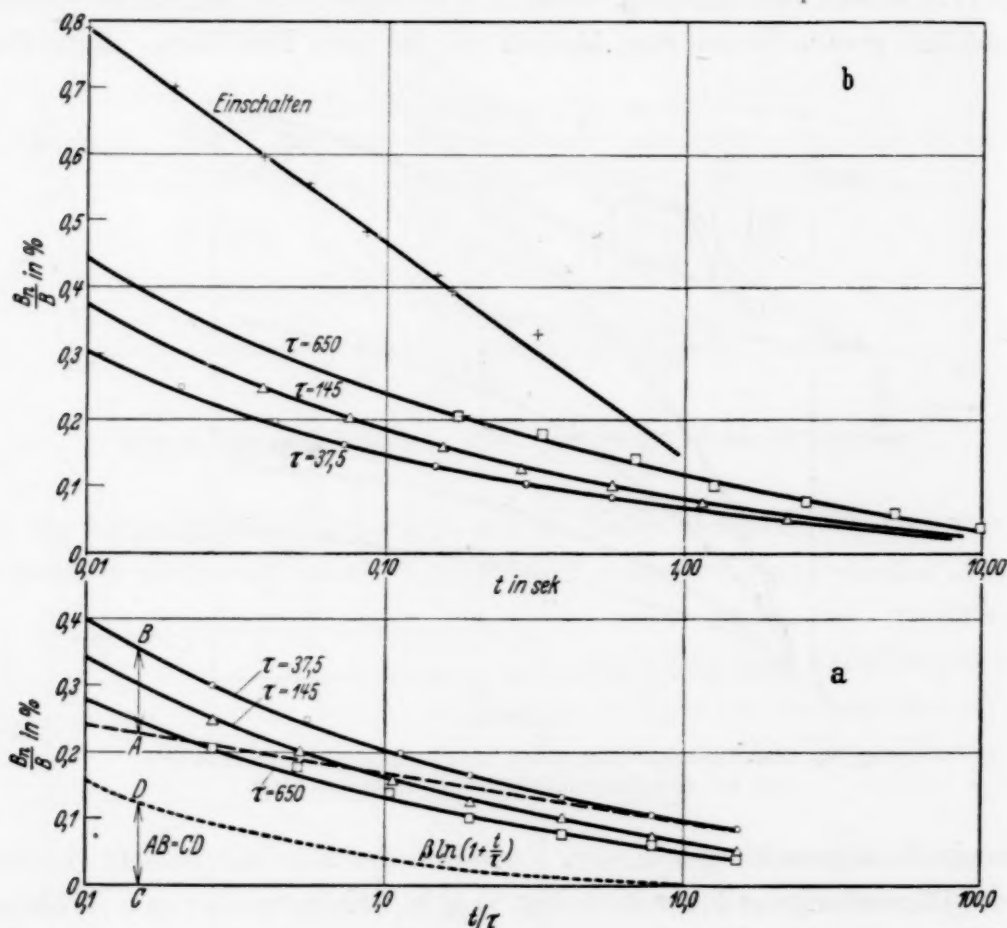


Fig. 11. Schaltversuche an dem Massekern.

a) Ein- und Ausschaltversuch in Abhängigkeit von t/τ .

b) Einschaltversuch, und Ein- und Ausschaltversuch in Abhängigkeit von t .

Vielleicht hat sie ihre Ursache in einer elastischen Nachwirkung des Isolationsmaterials und macht sich durch die elastomagnetische Kopplung bei der magnetischen Beobachtung bemerkbar.

V. Deutung des an dem Bandkern ausgeführten Schaltversuchs.

Die Abweichung von der Superpositionstheorie. Bei dem Vergleich des Einschaltversuchs mit dem Wechselstromversuch, wobei eine Übereinstimmung der β -Werte bis auf den Faktor 2 erreicht wurde, schien die klassische Nachwirkungstheorie ungefähr richtig zu sein. Der eigenartige

Befund des Ein- und Ausschaltversuchs läßt sich aber nicht mit dem Bild erklären, welches in der Nachwirkungstheorie gebraucht wird: die Hypothese der Superponierbarkeit muß aufgegeben werden. Im Gegensatz zu den Eigenschaften des Schemas für die dielektrische Nachwirkung (Fig. 1a) müssen wir erklären können, *in welcher Weise eine langzeitige Verzögerung nach dem Ausschalten angeregt werden kann durch den kurzzeitigen Einschaltvorgang*. Dies wäre möglich durch die formale Einführung eines nichtlinearen Elementes im elektrischen Schaltbild. Es müßten z. B. statt der Widerstände Gleichrichter gedacht werden. Diejenige Sorte von Gleichrichtern, welche bei der Stromrichtung des Ausschaltvorgangs einen vergrößerten Widerstand darstellt, hätte ein Verhalten im gewünschten Sinne zur Folge. Physikalisch heißt dies, daß sich gewisse Teilchen beim Einschalten trägheitslos verhalten und erst beim Ausschaltvorgang eine Verzögerung aufweisen. Das Versuchsergebnis beim Bandkern (Unabhängigkeit von der Zeit beim Ein- und Ausschaltversuch) kann nur beschrieben werden durch die Annahme, daß beim Einschalten individuell *andere Teilchen dem Felde verzögert folgen* als beim Ausschalten. Im krassen Widerspruch zu dem Bild der klassischen Nachwirkungstheorie, nach der es lokalisierte Fehlstellen im Material gibt, welche *jeder Kraft* mit einer gewissen Trägheit nachgeben.

Seit der Erforschung des Barkhausen-Effektes ist es naheliegend, die Verzögerung bei dem Schaltversuch in den verspätet nachspringenden Barkhausen-Bezirken zu suchen. Denken wir uns (für kleine Feldstärken) in das sich reversibel verhaltende magnetisch elastische Grundmaterial einzelne Bezirke eingeschlossen, welche eine individuelle Koerzitivkraft haben und deren Magnetisierung durch eine Rechteckschleife darzustellen sei. Wird ein Teilchen bei dem Einschalten des Meßfeldes gerade knapp bis zur Koerzitivkraft vormagnetisiert, so wird es aus verschiedenen Gründen (thermische Schwankungen, lokale Wirbelströme) eintreten können, daß der Barkhausen-Sprung erst nach einer gewissen endlichen Zeit abläuft. Es ist in diesem Bild ohne weiteres klar, daß im allgemeinen bei einem Ein- und Ausschaltversuch *ein Bezirk entweder beim Ein- oder beim Ausschalten springen wird*.

Eine Zurückführung der Nachwirkung auf Barkhausen-Sprünge erklärt automatisch die von uns beobachtete Eigenschaft der Nichtsuperponierbarkeit und der Unabhängigkeit der Ausschaltverzögerung von der Einschaltzeit.

Die Beschreibung des Schaltversuchs auf Grund eines Hysteresemodells.
Will man die Hystereseerscheinungen auf eine Überlagerung von elementaren

rechteckartigen Schleifen zurückführen und damit die Rayleighsche Beziehung erklären, sowie auch die Abhängigkeit der Rayleighschen Hysteresekonstante von der Vormagnetisierung¹⁾, so muß folgendes angenommen werden: 1. Die Breite der elementaren Schleifen hat eine bestimmte Häufigkeitsverteilung, wobei auch Schleifen mit der Breite Null vorkommen. 2. Die Elementarschleifen sind mit einer Vormagnetisierung behaftet zu denken. Es kommen Vormagnetisierungen vor von $H = 0$ bis zu $H > H_c$, sonst wäre der Flächeninhalt stark vormagnetisierter Zyklen¹⁾ nicht zu verstehen. Es ist leicht einzusehen (siehe noch weiter unten), daß für kleine Felder die Verteilungskurve über die Koerzitivkräfte a , sowie über die Vormagnetisierungen b eine horizontale Anfangsneigung haben muß; sonst läßt sich das Rayleighsche Gesetz nicht erklären. Aus diesem ersten Ansatz für eine Statistik der hystereseerzeugenden Bezirke können quantitative Schlüsse gezogen werden hinsichtlich der Anzahl der Bezirke, welche bei einem Schaltversuch gerade zum Umklappen gelangen²⁾.

Zweckmäßigerweise kann die Anzahl gleichgroß gedachter Bezirke in Abhängigkeit der Größen a und b als Fläche aufgetragen gedacht werden, wobei in der a — b -Ebene jeder Punkt einen Bezirk darstellt, charakterisiert durch Koerzitivkraft a und Vormagnetisierung b . Es gibt zwei verschiedene Arten von Bezirken (vgl. Fig. 12a), solche, die stark vormagnetisiert sind, $b > a$, so daß sie im feldfreien Zustand eine eindeutige Magnetisierungsrichtung besitzen, und solche, die schwach vormagnetisiert sind, $b < a$, deren Richtung bei $H = 0$ von der Vorgeschichte abhängt. Bei einer zyklischen Magnetisierung trägt offenbar nur die zweite Art zur Remanenz bei. Die erste Art verursacht nur eine Hysterese. Bei der Darstellung der Bezirke in der a — b -Ebene (Fig. 12b) soll die Richtung der jeweiligen Magnetisierung durch die Richtung der Schraffur angedeutet werden. Alle Bezirke, die zwischen der Ordinatenachse und der 45°-Linie abgebildet werden, gehören zur ersten Art (gleichbleibende Schraffur). Im entmagnetisierten Zustand ist im Gebiet $b < a$ die Richtung undefiniert. In Fig. 12b sind die drei Zustände bei dem zyklischen Schaltversuch (wie er auch ausgeführt wurde) mit kommutiertem Strom ($H = -H_1$, $H = 0$, $H = +H_1$) angedeutet. Wenn (für kleine Feldstärken) die Häufigkeit unabhängig von der Stelle in der Ebene ist, so wächst die Anzahl der sich betätigenden Bezirke mit der Fläche, also mit H^2 . Da die mittlere Schleifenbreite auch mit H proportional wächst, folgt unmittelbar die kubische Abhängigkeit

¹⁾ R. Goldschmidt, ZS. f. techn. Phys. **11**, 454, 1930. — ²⁾ Das Zustandekommen der folgenden Beschreibung verdanke ich einer Diskussion mit Herrn Prof. R. Becker.

der Verlustfläche von der Feldaussteuerung entsprechend der Rayleighschen Beziehung. Die Anzahl der Bezirke, die zur Remanenz beitragen, liegt im Viereck $OBCD$, woraus der ebenfalls durch den Rayleigh-Ansatz bekannte quadratische Anstieg der Remanenz mit der Feldstärke folgt.

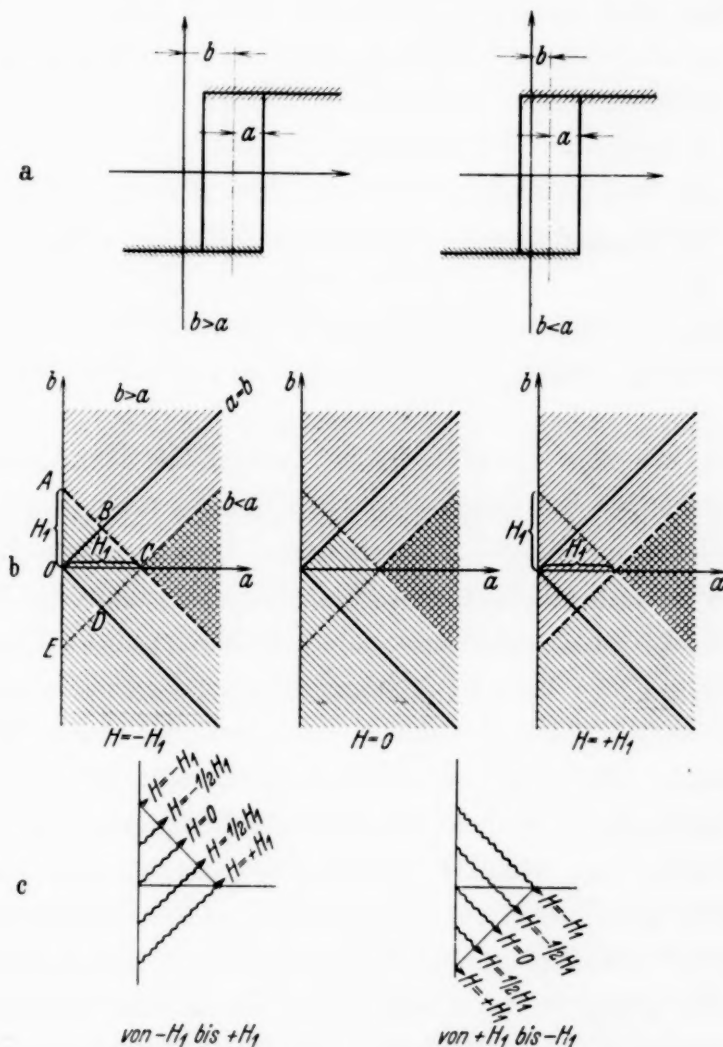


Fig. 12. Schema zur Deutung der Hysterese und der Nachwirkung für kleine Feldstärken durch elementare Rechteckschleifen.
 a) 2 Grundtypen der mit Vormagnetisierung behafteten Schleifen.
 b) Veränderung der Magnetisierungsrichtung der Bezirke bei zyklischer Ummagnetisierung bei Darstellung in der „ $a-b$ -Ebene“.
 c) Verschiebung der Front der umklappenden Bezirke.

Bemerkenswert sind die Aussagen unseres Schemas hinsichtlich der Anzahl der gerade springenden Bezirke. Es ist leicht zu sehen, daß bei jeder Feldstärke andere Bezirke labil werden. In Fig. 12c ist dargestellt das Fortschreiten der Front der kippenden Bezirke in der $a-b$ -Ebene bei allmählicher Feldstärkenänderung zwischen $-H_1$ und $+H_1$. Die Anzahl der springenden Bezirke wächst offenbar linear mit der Feldstärke. Bei $H = 0$ (Ausschalten) erhält man die halbe Anzahl (Strecke OB), als

wenn man das Feld $H = +H_1$ (Strecke EC) einschaltet. Dies entspricht aber unserem experimentellen Befund (Fig. 5), der uns zunächst im Rahmen der klassischen Nachwirkungsvorstellungen unerwartet und unerklärlich zu sein schien. Auch ist es auf Grund der Fig. 12 klar, daß bei Ausführung einer zyklischen Magnetisierung zwischen $H = 0$ und $H = +H_1$ (ohne Umpolung) nur das Dreieck OED im Gebiet $a < b$ zur Wirksamkeit kommt. Die Anzahl kippender Bezirke beim Schaltversuch wird dann durch die Strecke ED dargestellt. Die Strecke ED beträgt aber die Hälfte der Strecke CE , die beim üblichen symmetrischen Schaltversuch zur Geltung kam. Damit erklärt sich also quantitativ die Verschiedenheit der Kurven a und b in der Fig. 6.

Die Anzahl der kippenden Bezirke und damit die Nachwirkung wird bei höheren Feldstärken abhängen von der Statistik der Bezirke in der ganzen a — b -Ebene.

Genau so, wie das Rayleighsche Gesetz die Häufigkeitsfläche für kleines a und kleines b festlegte (zu einer horizontalen Ebene), muß für größere Feldstärken durch hinreichende Hystereseebeobachtungen die Häufigkeitsfläche zu bestimmen sein. Daraus müßte dann die Abhängigkeit des Nachwirkungs-Schaltversuchs von der Feldstärke abzuleiten sein. Es wurde für unsere Probe bloß die Abhängigkeit der Remanenz symmetrischer Schleifen von der Feldstärke bestimmt. Dies bedeutet in Fig. 12 den Rauminhalt desjenigen Prismas, das über dem Quadrat $OBCD$ steht und durch die Häufigkeitsfläche begrenzt wird. Einfacher ist die Bestimmung des Flächeninhaltes der Schnittfläche über der Strecke BC , aus der Größe von dB_r/dH für eine bestimmte Feldstärke H_1 . Der Nachwirkungsversuch ergibt dagegen ein Maß für den Flächeninhalt über der Strecke AC . Der wesentliche Unterschied im Verlauf der Nachwirkungskurve und der Kurve dB_r/dH in Fig. 9 (langsamerer Abfall der Nachwirkung), kann also dadurch erklärt werden, daß bei großem H auf BC weniger Bezirke liegen als auf AB . Dies heißt, daß es wenige Bezirke großer Koerzitivkraft (und kleiner Vormagnetisierung) gibt, aber verhältnismäßig viele Bezirke kleiner Koerzitivkraft und großer Vormagnetisierung.

In Fig. 13 ist das Verteilungsgebirge dargestellt (nur der Teil $b > 0$). Die Funktion wurde so gezeichnet, daß sowohl die Nachwirkung wie die dB_r/dH -Kurve der Fig. 9 richtig wiedergegeben wird. Die experimentellen Kurven legen zwar die gesuchte Funktion nicht quantitativ ausreichend fest, aus Kontinuitätsgründen läßt sich aber der Verlauf einigermaßen richtig zeichnen. Die Fläche ist mit Hilfe von Schnittkurven mit Ebenen $a = \text{const}$ und $b = \text{const}$ perspektivisch dargestellt.

Die schon erwähnte charakteristische Eigenschaft der Funktion ist der langsame Abfall des Plateaus (das bei $a \approx 0$, $b \approx 0$ das Rayleigh-Gebiet darstellt) für steigendes b bei kleinem a . Dagegen tritt bei steigendem a

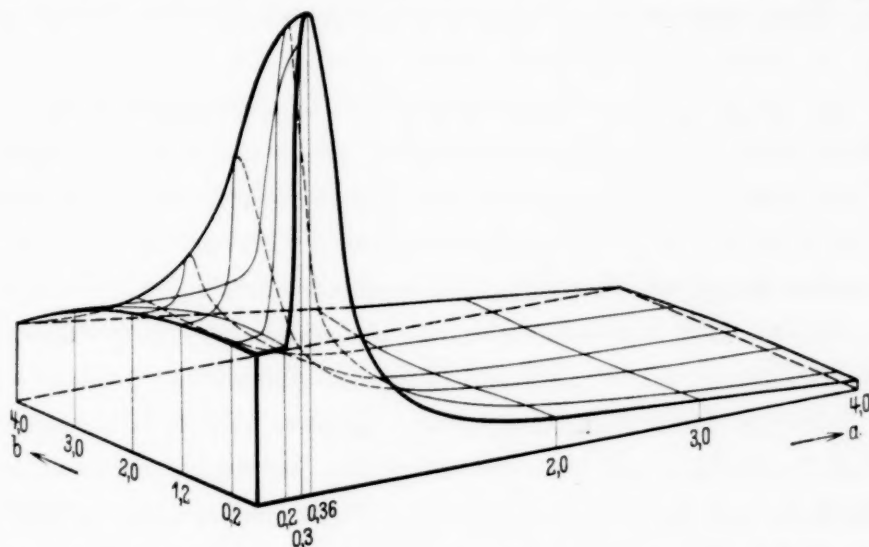


Fig. 13. Verteilungsfunktion der Bezirke zur Erklärung der Hysterese und der Nachwirkung des Bandkernes.

für kleines b nach Überschreiten eines hohen Maximums ein rascher Abfall ein. Diese Eigenschaft der Verteilungsfunktion ist qualitativ auch allein aus *Hystereseebeobachtungen* zu erwarten.

Unveröffentlichte Messungen von Herrn Dr. H. Kühlewein (im Forschungslaboratorium des Siemens-Konzerns ausgeführt) zeigen, daß bei Auftragung der Hysteresefläche und der Remanenz in Abhängigkeit von der Feldstärkeaussteuerung die Hysteresefläche noch merklich ansteigt, wenn der Remanenzwert bereits gesättigt ist. Diesen weiteren Anstieg der Verlustfläche erklärte bereits Kühlewein durch die Betätigung stark vormagnetisierter Gebiete. Diese Erscheinung ist offenbar die unmittelbare Folge des Umstandes, daß unser Gebirge in Fig. 13 in Richtung der b -Achse langsamer abfällt als in Richtung der a -Achse¹⁾.

Ursache der Verzögerung. Schaltversuch und Wechselstromversuch. Zur Erklärung der qualitativen Eigenschaften und auch einiger quantitativer Ergebnisse des Schaltversuchs haben wir nur wenig Annahmen über die physikalische Natur der Verzögerungserscheinung machen müssen.

¹⁾ Das hier vorgeschlagene Modell zur Behandlung der Hysterese und der Nachwirkung mit Hilfe von Teilchen, die im Material eingeschlossen und durch vormagnetisierte Rechteckschleifen gekennzeichnet sind, haben wir nur formal eingeführt. Die Vormagnetisierung b braucht nicht ein wahres inneres „Streu-feld“ zu sein. Es führen die „Wandverschiebungsprozesse“, die von R. Becker (Phys. ZS. **33**, 905, 1932) behandelt worden sind, auch auf scheinbar vormagnetisierte Schleifen, falls die Bewegung der Wand mit Hysterese behaftet ist.

Als für die Größe des Effektes maßgebend betrachteten wir die Anzahl derjenigen Bezirke, welche knapp bis zum Umklappen vormagnetisiert sind. Die Bezirke, welche eine endliche und beobachtbare Zeit zum Umklappen brauchen, liegen offenbar auf einem Streifen bestimmter Breite auf der Frontlinie (Fig. 12, z. B. AC).

Es fragt sich nun, 1. wodurch ist die Verzögerungszeit des Einzelbezirks bestimmt, 2. in welcher Beziehung steht die Zeit zur Entfernung von der Frontlinie. Die Kenntnis des Einzelmechanismus muß dann genügen, um sowohl das Abklinggesetz beim Schaltvorgang, wie auch die Phasenverschiebung bei Wechselstrom ableiten zu können.

Wir wollen hier bloß versuchen, die möglichen Hypothesen einer zukünftigen Theorie zu diskutieren, um ein plausibles qualitatives Bild für eine Deutung der Erscheinungen zu erhalten. Zwei Vorgänge sind es, die für das Zustandekommen der Verzögerung bei der Anregung der Barkhausen-Sprünge eine Rolle spielen dürften. 1. Die elementare Koerzitivkraft und auch die Vormagnetisierung sind beide thermischen Schwankungen unterworfen. Infolgedessen treten bei eingeschaltetem Feld nach einer bestimmten vorgegebenen Wartezeit noch stellenweise Ummagnetisierungen mit endlicher Wahrscheinlichkeit auf. 2. Der Ablauf des eingeleiteten Barkhausen-Sprunges wird durch die bremsende Wirkung lokaler Wirbelströme verzögert. Der Schaltversuch läßt sich allein durch die *Schwankungshypothese* deuten (ohne Berücksichtigung der Wirbelströme). Diejenigen Bezirke, welche zur Verzögerung Anlaß geben, liegen alle jenseits der Frontlinie. Wenn einmal die Summe der äußeren Feldstärke H und der Vormagnetisierung b den Wert der Koerzitivkraft a eines Bezirks erreicht hat, tritt der Sprung auf. Die erforderliche Wartezeit nimmt (entsprechend der abnehmenden Anregungswahrscheinlichkeit) mit der Entfernung von der Frontlinie zu. Die Annahme der Schwankungshypothese als einziger Nachwirkungsursache versagt aber zur Erklärung des Wechselstromversuchs. Infolge der Schwankungserscheinungen ist zwar eine Frequenzabhängigkeit des Hystereseverlustes zu erwarten, aber in dem Sinne, daß mit abnehmender Frequenz der Verlust monoton zunimmt. Bei quasistatischer Ummagnetisierung ist der größte Verlust zu erwarten, weil auch die am ungünstigsten gelegenen Bezirke einmal angeregt werden.

Experimentell wird dagegen (siehe oben) ein weitgehend frequenzunabhängiger Verlust pro Periode beobachtet, der aber bei quasistatischer Beobachtung nicht auftritt. Aus diesem Grunde scheint für die Nachwirkung die Behandlung der Wirbelstromvorgänge bei der Anregung der Barkhausen-Sprünge von Wichtigkeit zu sein. Es ist qualitativ klar, daß diese

Art von Wirbelstromverlusten eine neue zusätzliche Verlustkomponente für den Wechselstromversuch bedeutet, die nicht in den Wirbelstromverlust erfaßt ist, welche aus der pauschalen Permeabilität berechnet werden kann.

Eine rechnerische Behandlung des Problems wäre notwendig, um entscheiden zu können, in welcher Weise Schwankungserscheinungen und Wirbelstromvorgänge gleichzeitig für die experimentellen Tatsachen verantwortlich zu machen sind. Es scheint uns aber auf Grund qualitativer Erwägungen *unwahrscheinlich*, daß die Berücksichtigung der *Wirbelstromeffekte allein* ausreicht zur Erklärung des logarithmischen Zeitgesetzes. Insbesondere dürfte auch das Auftreten der sehr langsamen Änderungen kaum anders als durch Schwankungserscheinungen erklärt werden können. Die Verknüpfung zwischen dem β -Wert des Schaltversuchs und der Wechselstromphasenverschiebung ε erscheint hier nicht so einfach und übersichtlich, wie es bei dem Modell der dielektrischen linearen Nachwirkung der Fall war. Unsere Versuchsergebnisse lassen immerhin vermuten, daß auch hier eine Beziehung zwischen den beiden Zahlen vorhanden ist, die nicht wesentlich von den Erwartungen der klassischen Theorie abweicht. Man kann vielleicht das Vorhandensein der Verknüpfung zwischen β und ε folgendermaßen einsehen: Die Zahl β ist ein Maß dafür, wie viele Bezirke bei einer bestimmten Zeitgrößenordnung T während der Ver-e-fachung der Beobachtungszeit zum Umklappen kommen. Diese Bezirke stellen einen Streifen in unserer a — b -Ebene dar. Bei Ausführung des Wechselstromversuchs mit Feldstärkenamplitude = Schaltfeldstärke und einer Periodendauer, welche unserer Größenordnung T der Wartezeit entspricht, werden in der Hauptsache die *gleichen Bezirke* vom Wechselstrom gerade knapp angeregt werden und erfahren demzufolge eine starke (verlusterzeugende) Wirbelstrombremsung. (Wesentlich ungünstiger gelegene Bezirke werden gar nicht angeregt, die zu günstig gelegenen folgen momentan und tragen nur unwesentlich zur Verzögerung bei.) Somit erscheint es plausibel, daß ein und dieselbe charakteristische Zahl: die Anzahl der Bezirke mit bestimmter Zeitkonstante, sowohl für den Schaltversuch wie auch für den Wechselstromversuch maßgebend ist.

Diese Analogie mit der Theorie der dielektrischen Nachwirkung dürfte auch für die Erklärung der *Frequenzabhängigkeit der Permeabilität* (Teil III) maßgebend sein. Diese Erscheinung bringt zum Ausdruck, daß ein Teil der Permeabilität durch den Induktionsbetrag der Barkhausen-Sprünge hervorgerufen ist. Während bei Änderung der Frequenz immer individuell andere Bezirke für die Phasenverschiebung maßgebend werden, kommt für die Permeabilität die Summe aller angeregten Bezirke zur Geltung. Je höher

die Frequenz ist, um so weniger Bezirke kommen zur Anregung, folglich nimmt die Permeabilität mit steigender Frequenz ab.

Es sei noch bemerkt, daß die sogenannten *Auffrischungseffekte*¹⁾ (temporäre Erhöhung der reversiblen Permeabilität bei Schaltvorgängen) vermutlich auch mit den hier behandelten Vorgängen zusammenhängen. Nimmt man an, daß den Barkhausen-Bezirken auch eine bestimmte *reversible* Permeabilität zukommt, welche unmittelbar vor dem Sprung höher ist als nachher, so folgt zwanglos, daß nach jedem Schaltvorgang eine Erhöhung der Permeabilität auftritt, die allmählich wieder abklingt. Während der Induktionsänderung findet eine Verarmung an sprungbereiten Bezirken statt und die erhöhte Permeabilität nähert sich wieder dem stabilen Ruhewert.

Zusammenfassung.

Zur Klärung der Hypothese, daß die von Jordan eingeführte Wechselstromverlustkomponente auf magnetischer Nachwirkung beruht, wird versuchsweise eine formale Analogie mit der dielektrischen Nachwirkung angenommen. Zur Prüfung der Annahme dienen drei Versuche: 1. Messung der Frequenzabhängigkeit der Permeabilität, 2. Beobachtung der Verzögerung der Induktion beim Einschaltversuch, 3. dieselbe Beobachtung beim Ein- und Ausschaltversuch. Der erste und der zweite Versuch bestätigen größenordnungsmäßig die Erwartungen der klassischen Theorie. Der Ein- und Ausschaltversuch dagegen steht in schroffem Gegensatz zur formalen Theorie. Der Befund (gewonnen an einem Bandkern aus einer FeNi-Legierung), daß die Verzögerung bei dem Ausschalten unabhängig von der Einschaltzeit ist, beweist vielmehr, daß das Superpositionsprinzip bei der magnetischen Nachwirkung nicht zulässig ist.

Zur Deutung der Schaltversuche wird angenommen, daß die Nachwirkung durch das allmähliche Umklappen von Barkhausen-Bezirken bedingt sei. Die Statistik der umklappenden Bezirke kann so gewählt werden, daß die Feldstärkenabhängigkeiten sowohl der Hysterese wie der Nachwirkungserscheinungen des Schaltversuchs zwanglos erklärt werden können.

Die quantitative Verknüpfung der Verzögerungsfunktion unseres Schaltversuchs mit der Jordanschen Verlustkomponente ist noch nicht geklärt. Hierzu müßten rechnerisch berücksichtigt werden die thermischen Schwankungen und die lokalen Wirbelströme, welche bei den Barkhausen-Sprüngen auftreten.

¹⁾ Siehe z. B. H. Atorf, ZS. f. Phys. **76**, 513, 1932.

Ein neuer Sekundäreffekt der kosmischen Ultrastrahlung.¹⁾

Von **M. Ackemann** in Göttingen.

Mit 14 Abbildungen. (Eingegangen am 9. Februar 1935.)

Bei Untersuchungen der kosmischen Ultrastrahlung mit zwei nebeneinanderliegenden Geiger-Müllerschen Zählrohren wurde ein Sekundäreffekt beobachtet, der im folgenden mitgeteilt werden soll. Bemerkungen über Zählrohre und Apparaturen sowie über einige in Vorversuchen erzielte Ergebnisse sollen vorangestellt werden.

Überblick über die Literatur.

Eine systematische n -fach-Koinzidenz erhält man bekanntlich nur dann, wenn entweder durch alle Rohre ein und dasselbe ionisierende Teilchen fliegt oder durch die n Rohre mindestens je ein Teilchen zur gleichen Zeit. Der zweite Fall kann z. B. dann vorliegen, wenn Gabelstrahlen oder die sogenannten Schauer auftreten. Im Fall 1 wollen wir kurz von Koinzidenzen erster Art und im anderen Falle entsprechend von solchen zweiter Art reden.

Koinzidenzmessungen sind in letzter Zeit besonders häufig mit dem Ziel ausgeführt worden, Sekundäreffekte der kosmischen Ultrastrahlung zu untersuchen. Einige Veröffentlichungen auf diesem Gebiete, mit denen die vorliegende Arbeit in Zusammenhang steht, sollen zunächst besprochen werden.

Thomas H. Johnson und J. C. Street²⁾ haben unter anderem eine Anordnung getroffen, die es gestattet, die in einem Absorber erzeugten Sekundärstrahlungen zu messen, ohne daß die Zahl der Koinzidenzen erster Art verändert wird, wenn man den Absorber anbringt. Wie aus der schematisierten Fig. 1 ersichtlich ist, bringen sie über zwei in einer vertikalen Ebene befindlichen Zählrohren Blei so an, daß es sich außerhalb der inneren Rohrtangenten befindet. Die Zunahme, die sie beim Messen mit Blei bekommen, beträgt 7,6% gegenüber den ohne Absorber gewonnenen Werten; diese Differenz muß den im Blei erzeugten Sekundärstrahlungen zugeschrieben

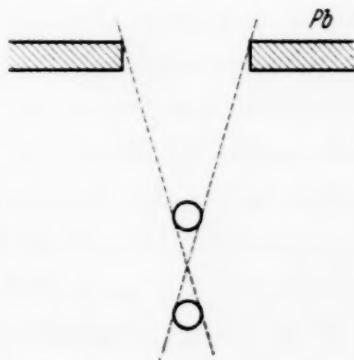


Fig. 1. Anordnung von Johnson und Street zur Messung von Sekundäreffekten in Blei.

¹⁾ Hierüber erschienen bereits kurze Notizen in Naturwissensch. von J. N. Hummel und dem Verfasser, Naturwissensch. **22**, 169, 1934. — ²⁾ Thomas H. Johnson u. J. C. Street, Phys. Rev. **40**, 638, 1932; **42**, 142, 1932.

werden. Erwin Fünfer¹⁾ ordnet vier Zählrohre dicht nebeneinander an, über die in größerem Abstände ein fünftes gebracht wird; über das Ganze wird dann ein Absorber gepackt — z. B. auch Blei. In ähnlicher Weise sind von Fünfer und Bruno Rossi²⁾ (Fig. 2) auch Dreifach-Koinzidenzen untersucht worden. Diese beiden Autoren geben aufgenommene Kurven wieder, bei denen die Koinzidenzzahlen in Abhängigkeit von der Absorberdicke aufgetragen sind (zwei der von E. Fünfer aufgenommenen Kurven zeigt Fig. 3). Im wesentlichen ist der Kurvenverlauf bei beiden

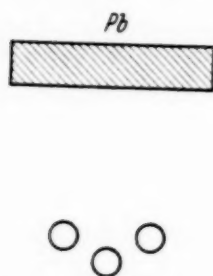


Fig. 2. Koinzidenzanordnung von Bruno Rossi.

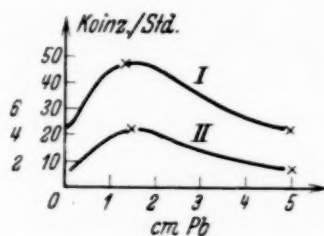


Fig. 3. E. Fünfer: Drei- und Fünffach-Koinzidenzen in Abhängigkeit von der Bleidicke; die Fünffach-Koinzidenzen stellt die Kurve II dar; zu ihr gehören die kleinen Zahlen der Ordinate.

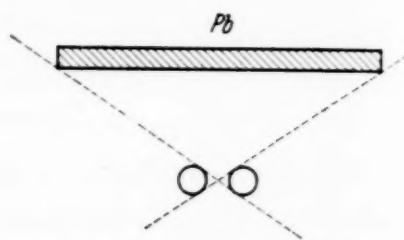


Fig. 4. Anordnung, mit der es gelang, das zweite Maximum aufzufinden.

der gleiche. Die Zunahme der Koinzidenzen beträgt zum Teil erheblich mehr als 100%. Die bei den Messungen verwandten maximalen Absorberdicken sind 6 cm bei Fünfer und 9 cm bei Rossi. Die Kurven gehen übereinstimmend nicht unter ihren Anfangspunkt herab.

Zu Untersuchungen von Sekundäreffekten mit Hilfe von Koinzidenzmessungen sei allgemein folgendes bemerkt: Zweifach-Koinzidenzanordnungen haben den Vorteil größerer Einfachheit in experimenteller Hinsicht, ergeben dafür aber unter Umständen nur kleine Effekte (wie bei Johnson und Street 7,6%; S. 303), wodurch dann lange Meßreihen bedingt werden. Mißt man dagegen mehr als zweifache Koinzidenzen, so bekommt man zwar größere Effekte — zum Teil weit über 100% —, muß aber eine kompliziertere Apparatur in Kauf nehmen. Es schien wünschenswert, mit nur zwei Zählrohren eine Anordnung zu finden, die große Effekte erzielen ließ; Fig. 4 zeigt eine solche Anordnung. Vergleicht man nun Fig. 4 mit Fig. 1, so kann man sagen, daß die Johnson-Street-Anordnung gewissermaßen auf den Kopf gestellt wird. Beide Versuchsanordnungen lassen den Raum, aus dem Koinzidenzen erster Art kommen können, frei von Absorbern. Während

¹⁾ Erwin Fünfer, ZS. f. Phys. **83**, 92, 1933. — ²⁾ Bruno Rossi, ebenda **82**, 151, 1933; Bruno Rossi, Helv. Phys. Acta **6**, 440, 1933.

nun aber Johnson und Street schon ohne Blei sehr viele Koinzidenzen bekommen, denen gegenüber die Zunahme bei angebrachtem Absorber prozentual nur sehr wenig ins Gewicht fällt, ist bei der in der Fig. 4 gezeigten Anordnung die Zahl der ohne Panzer gemessenen Koinzidenzen äußerst gering; die Zunahme muß sich prozentual entsprechend stärker bemerkbar machen. Die Richtigkeit der angestellten Überlegungen wird durch die später zu besprechenden Meßergebnisse bestätigt werden. Bei Rossi und Fünfer ist der Abstieg der Kurven hinter dem Maximum nur ein kurzes Stück verfolgt worden; 9 cm maximale Absorberdicke; in der vorliegenden Arbeit ist nun der Kurvenverlauf erheblich weiter — nämlich bis 22 cm Blei — untersucht worden. Die Messungen ergaben in diesem Abschnitt einen unerwarteten Verlauf der Kurve. Hierüber wird noch ausführlicher zu sprechen sein. Für die Koinzidenzmessungen wurden nacheinander zwei Verstärkerapparaturen zusammengestellt und ausprobiert; die eine nach dem von Bothe¹⁾, die andere nach dem von Hummel²⁾ angegebenen Schaltschema.

Die folgenden Ausführungen werden in einige Abschnitte geteilt. Im ersten werden Bemerkungen über Zählrohre und ihren Bau gemacht, im zweiten und dritten werden die Verstärkerapparaturen besprochen und im vierten miteinander verglichen. Anschließend werden die erhaltenen Meßergebnisse mitgeteilt und diskutiert.

Voruntersuchungen.

1. Bemerkungen über Zählrohre und Zählrohrbau. Die aus nahtlosen Metallrohren hergestellten Zähler wurden mit Hartgunnistopfen verschlossen, mit Paraffin abgedichtet und mit getrockneter Luft von einigen cm Hg gefüllt. Der Zählrohrdraht — aus blankem Stahl — hatte einen Durchmesser von 0,2 mm.

Die Einsatzspannung erwies sich als linear abhängig vom Gasdruck (Fig. 5). Einige Charakteristiken sind aus der Fig. 6 zu sehen. Das Arbeiten eines Zählers bezeichnet man meist dann als gut, wenn ein genügend großer Bereich vorhanden ist, in dem die Impulszahl von der angelegten Überspannung unabhängig ist. Man sieht, daß der Bereich, in dem die Stoßzahl nahezu konstant blieb, im vorliegenden Falle etwa 80 bis 120 Volt betrug. Es wurden Untersuchungen über Stopfeneinfluß und spontane Entladungen angestellt. So wurde z. B. ein Rohr gebaut, in dessen Verschlußstopfen

¹⁾ W. Bothe, ZS. f. Phys. **59**, 1, 1929. — ²⁾ J. N. Hummel, ebenda **70**, 765, 1931.

kleine, in das Innere des Zählers ragende Messingstifte eingesetzt wurden. Zu dieser Bauart hatte folgende Überlegung geführt: Das elektrische Feld im Rohrrinnern wird an den Enden stets etwas verzerrt sein; man kann das in erster Linie wohl auf ein durch Aufladungen der Stopfen bedingtes

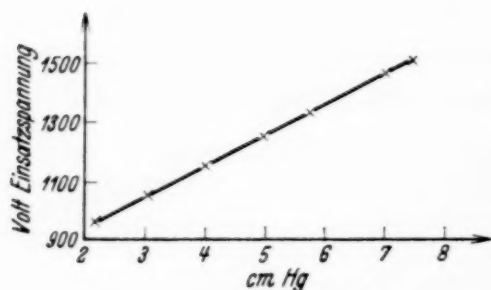


Fig. 5. Abhängigkeit der Einsatzspannung vom Gasdruck.

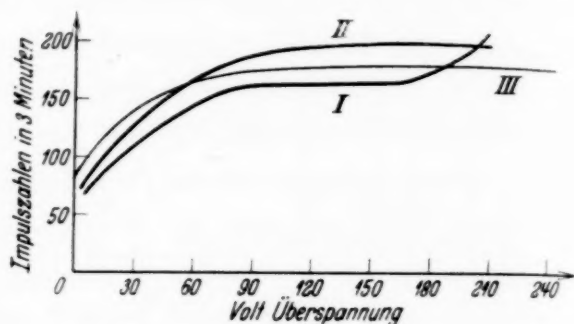


Fig. 6. Charakteristiken von Zählrohren verschiedener Bauart.

Zusatzfeld zurückführen [J. N. Hummel¹⁾]. Es sollte versucht werden, die Verzerrung des Feldes durch Einfügen der Stifte etwas herabzusetzen, wodurch ein besseres Arbeiten des Zählers erreicht werden sollte. Mit dem so gebauten Rohr konnte eine gute Charakteristik aufgenommen werden (Kurve III der Fig. 6). Ein Zählrohr in einem Glasmantel

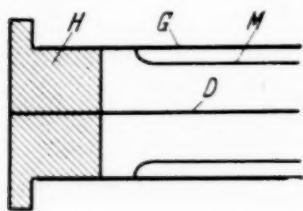


Fig. 7. Zählrohr im Glasmantel. *G* = Glas-, *M* = Metallrohr, *D* = Draht, *H* = Hartgummistopfen.

[siehe auch Werner Schulze²⁾] ergab eine ziemlich schlechte Charakteristik; auch ein an den Enden umgebogenes und abgerundetes Rohr in einer Glashülle arbeitete nicht gut (Fig. 7 zeigt schematisch ein solches Rohr). Schließlich wurde in die Innenwand eines Rohres ein tiefes Gewinde eingeschnitten, wodurch eine möglicherweise vorhandene Spitzenwirkung der Wand beim Arbeiten des Zählrohres absichtlich verstärkt werden

sollte; das Rohr arbeitete überraschenderweise nicht schlecht. Hieraus kann geschlossen werden, daß die Beschaffenheit der Innenwand für das Arbeiten eines Zählrohres nicht von so großer Bedeutung ist, wie das bisweilen wohl angenommen wurde.

Für die Hauptmeßreihen wurden acht Rohre gleicher Dimension und Bauart angefertigt; sie hatten eine innere Länge von 10 cm, einen inneren Durchmesser von 2,6 cm und eine Rohrwandstärke von 0,1 cm; geschnitten waren die Zähler aus einem nahtlosen Messingrohr. Von diesen acht Zählrohren wurden zunächst vier zusammengebaut und untersucht. Die Größe

¹⁾ J. N. Hummel, Phys. ZS. **34**, 331, 1933. — ²⁾ Werner Schulze, ZS. f. Phys. **78**, 92, 1932.

der täglich bestimmten Einsatzspannungen zeigt Fig. 8 (Kurvenschar I). Nach einigen Tagen wurden die Rohre wieder geöffnet, außen an den Abdichtungsstellen mit Schmirgel aufgeraut, gereinigt und erneut verschlossen. Jetzt war der Anstieg der Einsatzspannungen zwar nicht verschwunden,

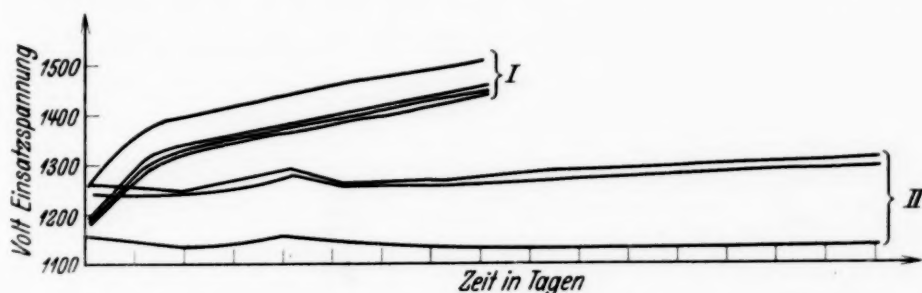


Fig. 8. Einsatzspannungen als Funktion der Zeit. (Die Zählrohre sind verschiedenartig abgedichtet.)

aber doch viel weniger stark ausgeprägt (Kurvenschar II der Fig. 8). Offensichtlich haftet also das Paraffin nicht genügend an glatten Metallflächen.

Christoph und Hanle¹⁾ publizierten Untersuchungen über die Temperaturabhängigkeit von Zählrohrimpulszahlen. Bei den Messungen der vorliegenden Arbeit wurde beobachtet, daß die Einsatzspannung mit der Temperatur im Laboratorium schwankte. Um diese Abhängigkeit quantitativ zu erfassen, wurde die Einsatzspannung eines Zählrohres bei verschiedenen Zimmertemperaturen systematisch bestimmt. Fig. 9 zeigt die aufgenommene Kurve. Demnach betrug die Erhöhung der Einsatzspannung etwa 1 Volt pro Grad Celsius.

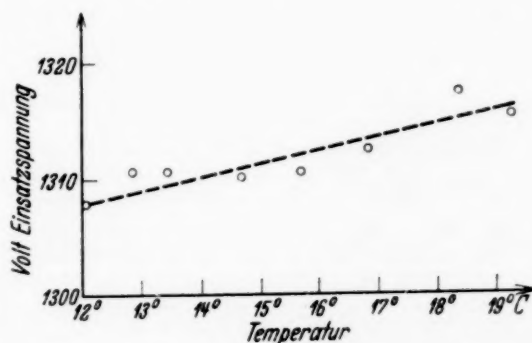


Fig. 9. Einsatzspannung als Funktion der Zimmertemperatur.

Durch alleiniges Abkühlen des Zählrohres konnte gezeigt werden, daß die Temperatur des Rohres und nicht die der Hochohmwiderstände oder der sonstigen Apparaturteile bestimmend für die Höhe der Einsatzspannung war. Es kann wohl als sicher angenommen werden, daß die Temperatur des Füllgases und nicht die des Metallzylinders die Höhe der Einsatzspannung bestimmt. Dann würde das experimentelle Ergebnis besagen, daß die Einsatzspannung eines Zählrohres einerseits der Gastemperatur (Fig. 9) und andererseits dessen Druck (Fig. 5) proportional ist. Dann gilt auch $p = \text{const} \cdot T$; die Höhe der Einsatzspannung

¹⁾ W. Christoph u. W. Hanle, Phys. ZS. **34**, 641, 1933.

hängt nicht allein von der Zahl der im Zähler vorhandenen Gasmoleküle — also nicht allein von der Dichte — ab, sondern von p bzw. T . Die Kurve der Fig. 9 ist mit einem Zählrohr aufgenommen worden, das vollständig in Glas eingeschmolzen war. Mit Paraffin abgedichtete Zähler wurden schon bei Temperaturänderungen von nur wenigen Grad undicht.

2. Die Bothesche Schaltung. Für die Koinzidenzmessungen wurde zunächst eine Verstärkerschaltung nach dem Prinzip von Bothe¹⁾ — jedoch

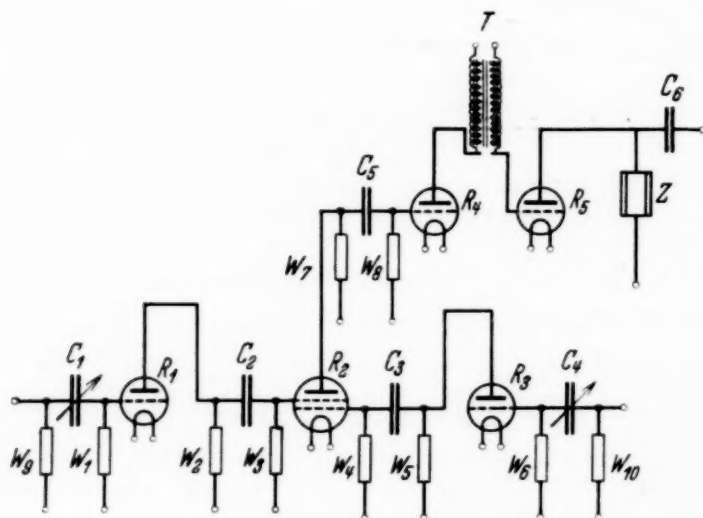


Fig. 10. Verstärkerschaltung nach Bothe.

$W_1 = 2 \cdot 10^6 \Omega$,	$W_6 = 2 \cdot 10^6 \Omega$,	$C_1 = 30 \text{ cm}$,	$R_1 = \text{RE 084}$,
$W_2 = 0,01 \cdot 10^6 \Omega$,	$W_7 = 0,2 \cdot 10^6 \Omega$,	$C_2 = 2000 \text{ cm}$,	$R_2 = \text{RES 044}$,
$W_3 = 10^6 \Omega$,	$W_8 = 0,1 \cdot 10^6 \Omega$,	$C_3 = 2000 \text{ cm}$,	$R_3 = \text{RE 084}$,
$W_4 = 10^6 \Omega$,	$W_9 = \text{etwa } 10^9 \Omega$,	$C_4 = 30 \text{ cm}$,	$R_4 = \text{TKD}$,
$W_5 = 0,02 \cdot 10^6 \Omega$,	$W_{10} = \text{etwa } 10^9 \Omega$,	$C_5 = 5000 \text{ cm}$,	$R_5 = \text{Thyratron}$,
		$C_6 = 10000 \text{ cm}$,	

$Z = \text{Telephongesprächszähler}$, $T = \text{Transformator}$.

mit einigen Änderungen — verwandt. Ihr Funktionieren beruht bekanntlich auf dem Arbeiten der Zweigitterröhre. Die Stöße beider Zähler werden je auf ein Gitter der Doppelgitterröhre übertragen; deren Gittervorspannungen sind so gewählt, daß sie nur einen Stromstoß gibt, wenn beide Gitter gleichzeitig aufgeladen werden, d. h. aber bei einer Koinzidenz. Nach längeren Versuchen mit der Apparatur zu dem Zweck, ein möglichst hohes Auflösungsvermögen zu bekommen, ergab sich die endgültige Schaltung, mit der quantitative Messungen gemacht wurden; Fig. 10 zeigt die Schaltskizze. Man sieht, daß vor allem die Widerstände recht klein gewählt waren.

Zum Arbeiten der Apparatur sei folgendes bemerkt: Bei hohen Anodenspannungen der beiden Eingangsröhren (RE 084) läuft man Gefahr, daß

¹⁾ W. Bothe, ZS. f. Phys. **59**, 1, 1929.

Einzelimpulse von der Doppelgitterröhre fälschlich als Koinzidenzen angezeigt werden; bei kleinen Anodenspannungen der RE 084 kann es dagegen vorkommen, daß infolge zu geringer Verstärkung der beiden (gleichzeitig erfolgenden) Einzelimpulse wirkliche Koinzidenzen nicht registriert werden. Es ist wünschenswert, daß man einen weiten Bereich hat zwischen den Werten der Anodenspannungen, bei denen Einzelimpulse gerade nicht mehr und Koinzidenzen gerade noch alle angezeigt werden. Dieser Bereich betrug in der vorliegenden Schaltung etwa 80 Volt. Gearbeitet wurde dann bei einem Mittelwert mit großem Sicherheitskoeffizienten. Das Auflösungsvermögen bei der eben erwähnten mittleren Anodenspannung der Eingangsrohren wurde in zwei längeren Meßreihen zu $4,4 \cdot 10^{-4}$ und $4,7 \cdot 10^{-4}$ sec bestimmt. Diese Werte wurden errechnet nach der bekannten Formel

$$\tau = \frac{N}{2 \cdot n_1 \cdot n_2},$$

bei der n_1 und n_2 die Einzelimpulszahlen der beiden Zähler,

N die Zahl der zufälligen Koinzidenzen und τ das Auflösungsvermögen bedeuten. Da es sich letzten Endes nur um die Zählung von Koinzidenzen und nicht die von Einzelimpulsen handelte, erwies sich ein Telefongesprächszähler handelsüblicher Bauart trotz seines geringen Auflösungsvermögens für die automatische Registrierung als durchaus brauchbar. Als Ausgangsröhre (R_5 in der Fig. 10) wurde zunächst eine mit Quecksilberdampf, später eine mit Edelgas gefüllte Thyatronröhre verwandt.

Die nun folgenden Messungen sind im Keller des Geophysikalischen Instituts — eines massiven, dreistöckigen Hauses — ausgeführt worden; die dort zur Messung gelangte Ultrastrahlung hatte also bereits ein dickes Mauerwerk von mehreren Zentimetern Bleiäquivalent durchsetzt; die Strahlung war mithin nicht nur geschwächt, sondern auch von Sekundärstrahlung aus den Mauern begleitet. Das sei für die folgenden Ausführungen besonders betont. Zuerst sollte der von Johnson und Street mit der Anordnung der Fig. 1 erzielte Effekt reproduziert werden. Bei hinreichend großem Zählrohrabstand ergab sich dieser Effekt tatsächlich in der richtigen Größenordnung. Die zufälligen Koinzidenzen wurden — wie üblich — in der Weise bestimmt, daß die Rohre recht weit auseinander gelegt und die dann noch auftretenden Koinzidenzen als zufällige betrachtet wurden. Während dieser Messungen hatte die Apparatur gut funktioniert; um Vergleichsmöglichkeiten zu bekommen, wurde nun die Hummelsche Schaltung verwandt.

3. *Die Hummelsche Schaltung.* Die benutzte Schaltung ist in der Fig. 11 schematisiert wiedergegeben. Wegen des Grundgedankens, nach dem sie gebaut wurde, sowie wegen Einzelheiten in der Ausführung sei auf die

Arbeit von Hummel verwiesen¹⁾). Nach Vorversuchen wurde eine Meßreihe durchgeführt, in der Koinzidenzen und die Einzelimpulse beider Rohre als Funktion der Überspannung, die bei beiden Zählern gleich war, ermittelt wurden. Obgleich die Einzelimpulse mit der Überspannung etwas zunahmen, blieb die Zahl der zufälligen und der systematischen Koinzidenzen doch

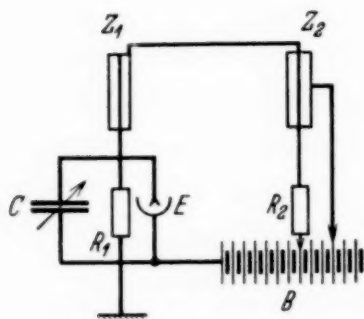


Fig. 11. Hummelsche Schaltung. Z_1 und Z_2 = Zähler; R_1 und R_2 = Hochohmwiderstände; E = Einfadenelektrometer; B = Batterie; C = Drehkondensator von etwa 1000 cm.

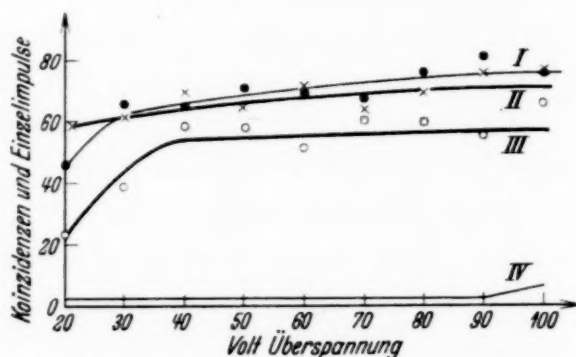


Fig. 12. Einzelimpulszahlen (Kurven I und II), systematische (Kurve III) und zufällige (Kurve IV) Koinzidenzen als Funktion der Überspannung.

weitgehend konstant. Die Kurven sind in der Fig. 12 eingezeichnet; zu ihr gehört Tabelle 1. Legt man deren Zahlen der Berechnung des Auflösungsvermögens zugrunde, so ergibt sich der in Spalte 6 errechnete Wert von $\tau = 1,18 \cdot 10^{-3}$ sec.

Tabelle 1. Abhängigkeit der systematischen und zufälligen Koinzidenzen, sowie der Einzelimpulse von der Überspannung. Koinzidenzzahlen sind pro Viertelstunde, Einzelimpulszahlen pro Minute angegeben. Für jede Überspannung wurde das Auflösungsvermögen bestimmt (Spalte 6).

1 Über- spannung Volt	2 Zufällige Koinzidenzen	3 Systematische Koinzidenzen	4 Einzelimpulse der beiden Zähler	5	6 Auflösungs- vermögen der Apparatur
20	3	22	48	60	$2,08 \cdot 10^{-3}$
30	1	38	65	62	0,50
40	2	58	65	69	0,89
50	2	59	72	65	0,85
60	2	53	71	72	0,78
70	3	62	70	67	1,28
80	3	61	78	71	1,08
90	3	56	84	78	0,92
100	7	68	78	79	2,24
Mittel:					$1,18 \cdot 10^{-3}$

¹⁾ J. N. Hummel, ZS. f. Phys. 70, 765, 1931.

Tabelle 2. Koinzidenzzahlen bei Anwendung verschiedener Absorberdicken. Messung im Keller des Institutes. Hierzu Kurve I der Fig. 13.

Ohne Blei	Mit Blei					
	1,0 cm	1,6 cm	2,2 cm	4,4 cm	8,8 cm	17,6 cm
345	374	313	396	342	304	384
In Minuten						
675	675	675	675	675	675	795
Mittel pro Viertelstunde						
7,67 ± 0,289	8,31 ± 0,27	6,96 ± 0,254	8,8 ± 0,201	7,6 ± 0,288	6,76 ± 0,269	7,25 ± 0,27

Tabelle 3. Koinzidenzzahlen bei Anwendung verschiedener Absorberdicken. Messung im Gaußhaus. Hierzu Kurve II der Fig. 13.

Ohne Blei	Mit Blei							
	1,0 cm	1,6 cm	2,2 cm	4,4 cm	8,8 cm	13,2 cm	17,6 cm	22,0 cm
222	216	202	201	207	327	334	350	305
In Minuten								
270	150	150	165	225	465	465	465	465
Mittel pro Viertelstunde								
12,33 ± 0,448	21,6 0,944	20,2 ± 0,658	18,27 ± 0,610	13,8 ± 0,513	10,55 ± 0,376	10,77 ± 0,368	11,29 ± 0,395	9,84 ± 0,410

4. Vergleich der beiden Apparaturen miteinander. Mit zwei gleich großen übereinander in 4,5 cm Abstand liegenden Zählrohren wurden nun bei 80 Volt Überspannung nacheinander mit beiden Apparaturen Koinzidenzen gezählt; Ergebnis: Mit der Botheschen Schaltung 1422 Koinzidenzen in 450 Minuten und mit der Hummelschen 1506 in der gleichen Zeit. Der Unterschied beträgt ungefähr 6% und die nach der Formel $S = 1/\sqrt{n}$ berechnete statistische Schwankung S etwa $\pm 3\%$ (n Zahl der Koinzidenzen). Die Übereinstimmung wurde als ausreichend betrachtet.

Obgleich das Auflösungsvermögen der Botheschen Apparatur höher war, wurde die Hummelsche Schaltung doch wegen ihrer besonderen experimentellen Einfachheit bei den folgenden Messungen weiter verwandt.

Ein neuer Sekundäreffekt der kosmischen Ultrastrahlung.

1. Der experimentelle Befund. Mit der Anordnung der Fig. 4 wurde bei einem Zählrohrachsenabstand von 4,5 cm gemessen; benutzt wurden hierbei zwei der auf S. 306 beschriebenen acht Rohre. Um systematische Fehler zu vermeiden, sowie um eventuell auftretende Schwankungen nach

Möglichkeit unschädlich zu machen, wurde abwechselnd bei verschiedenen Absorberdicken und ohne Blei gearbeitet; zwischendurch wurden zufällige Koinzidenzen bestimmt und die Zahl der Einzelimpulse auf Konstanz geprüft. Jede Messung dauerte 15 Minuten; in der Tabelle 2 sind die gemessenen Werte angegeben; sie sind in der Fig. 13 zu der Kurve I vereinigt.

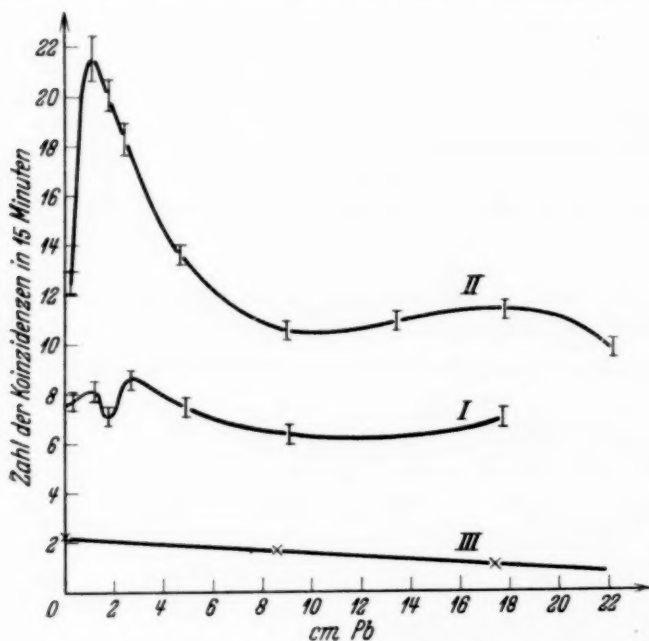


Fig. 13. Absorptionskurven; Koinzidenzzahlen in Abhängigkeit von der Absorberdicke. Kurve I ist im Keller des Institutes, II im Gaußhaus gemessen. III stellt die zufälligen Koinzidenzen dar.

Besonders beachtenswert erschien zunächst der Wiederanstieg der Kurve bei etwa 17,6 cm Blei. Zur Nachprüfung dieses Ergebnisses wurde die Apparatur in das Gaußhaus transportiert. Das Gaußhaus ist ein kleines — frei im Institutspark gelegenes — Holzhaus mit dünnen Wänden und einem leichten Dach. Hier mußte also die Strahlung nahezu ungefiltert zur Messung gelangen. Die eben beschriebene Meßreihe wurde hier wieder-

holt. Der erwähnte Wiederanstieg der Kurve kam auch bei dieser Messung wieder deutlich zum Ausdruck. Sonst zeigten die Kurven gewisse Unterschiede. Die Gaußhauskurve ist als Kurve II in der Fig. 13 enthalten; die ihr zugrunde liegenden Werte sind in Tabelle 3 zusammengestellt. Bei Kurve II liegen alle Werte etwas höher als bei I, was auf die Tatsache zurückgeführt wird, daß bei ihr die Strahlung fast ungefiltert zur Messung gelangte. Von dem unregelmäßigen Verlauf im Anfang der Kurve I konnte bei der zweiten Meßreihe nichts bemerkt werden; dieses unterschiedliche Verhalten soll erst später zur Besprechung gelangen. Bei der Gaußhauskurve, die bis 22 cm Blei fortgesetzt wurde, konnte auch noch ein Wiederabstieg hinter 17,6 cm gemessen und damit ein deutlich ausgeprägtes Maximum an dieser Stelle erhalten werden. Dieser Kurvenbuckel soll im folgenden kurz als zweites Maximum bezeichnet werden. Bei beiden Kurven betrug die Größe des Wiederanstiegs etwa 8% und übertraf damit die nach der Formel $1/\sqrt{n}$ berechnete statistische Schwankung. Aber selbst wenn in dem betrachteten Bereich die Kurve parallel der Abszisse verlaufen würde, so

wäre das etwas gänzlich Unerwartetes. Aus zwei Gründen wäre hier nämlich mit einem Sinken der Kurve zu rechnen; einmal wird man die Absorption berücksichtigen und daher einen ungefähr exponentiell verlaufenden Abfall annehmen müssen. Dann aber muß auch wegen der Verringerung der zufälligen Koinzidenzen eine Abnahme eintreten. Zu dieser Behauptung sei folgendes bemerkt. Aus $\tau = \frac{N}{2 \cdot n_1 \cdot n_2}$ (S. 309) berechnet man das

Auflösungsvermögen der Apparatur; dieses muß eine Apparatkonstante sein. Vermindert sich nun die Zahl der Einzelimpulse aus irgendeinem Grunde, so nimmt damit auch die Zahl der zufälligen Koinzidenzen ab. Durch die Absorption im Blei wird nun aber die Einzelimpulszahl in den Rohren tatsächlich bei Verstärkung des Panzers herabgesetzt und mit ihr auch die Anzahl der zufälligen Koinzidenzen. Wie S. 309 beschrieben, wurden zunächst die zufälligen Koinzidenzen experimentell bestimmt; aus ihnen und aus den gemessenen Einzelimpulszahlen wurde τ berechnet. Dann wurden die Einzelimpulse in den beiden Rohren als Funktion der Panzerstärke gezählt und aus ihnen und τ die Zahlen der zufälligen Koinzidenzen bestimmt. Kurve III der Fig. 13 gibt die Werte wieder. I und II stellen die tatsächlich gemessenen Koinzidenzen dar; sie enthalten also noch die zufälligen. Will man die systematischen berechnen, so hat man von den Zahlen der gemessenen diejenigen der zufälligen in Abzug zu bringen. Die der Kurve III zugrunde liegenden Werte sind im Gaußhaus ermittelt worden; die Kurve III gehört also zu II. Die entsprechend zu I gehörige Kurve der zufälligen Koinzidenzen fällt nahezu völlig mit III zusammen und ist der besseren Übersichtlichkeit wegen nicht mit eingezeichnet worden. Die kleinen senkrechten Striche in den Punkten der Kurven I und II entsprechen der Größe des nach der Formel $F = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{\sum \Delta^2}{n \cdot (n - 1)}}$ berechneten wahrscheinlichen mittleren Fehlers des Mittelwertes.

2. Diskussion des Effektes. Für die wirkliche Existenz des zweiten Maximums spricht besonders die Tatsache, daß es zweimal und noch dazu an verschiedenen Orten gefunden werden konnte¹⁾. Vor Versuchen, das zweite Maximum zu deuten, sei das Zustandekommen eines Maximums in Absorptionskurven dieser Art überhaupt kurz dargestellt: Trifft eine Strahlung auf Materie, so tritt zweierlei ein: I. Erzeugung von sekundären

¹⁾ Als weitere Bestätigung können aufgefaßt werden die Arbeiten von J. N. Hummel (Naturwissensch. **22**, 170, 1934) und von H. Maass (Phys. ZS. **35**, 858, 1934); die letztere wurde dem Verfasser erst nach Fertigstellung der vorliegenden Arbeit bekannt.

Strahlen. II. Schwächung der erzeugenden (und der sekundären) Strahlung. Überwiegt I, so steigt die Kurve an; im Falle eines Überwiegens von II über I fällt sie. Dazwischen liegt ein Höchstwert (hierzu siehe auch Fig. 3). Die Natur der primären Strahlung (γ - oder Korpuskularstrahlung) spielt bei dieser einfachsten Betrachtung keine Rolle. Da nun die gemessenen Kurven I und II der Fig. 13 (abgesehen von dem Höcker der Kurve I bei etwa 1 cm Blei) zwei Höchstwerte haben, so reicht diese eben vorgenommene einfache Betrachtungsweise zur Erklärung des experimentellen Befundes natürlich noch nicht aus. Vielleicht sind hier zwei voneinander verschiedene Strahlungen — also gewissermaßen zwei Komponenten — wirksam. Jede Komponente würde eine Kurve mit einem Maximum geben, dessen jeweilige Lage von der Härte der Strahlung abhängen würde. Durch einfache Superposition erhielte man dann Kurven mit zwei Maxima; diese Überlegung würde zu dem Schluß führen, daß es mit den vorgenommenen Messungen gelungen wäre, eine Komponentenzerlegung der Ultrastrahlung vorzunehmen. Der Gedanke liegt nahe, eine Beziehung zu den von Regener¹⁾ gefundenen fünf Komponenten der kosmischen Ultrastrahlung zu suchen. Versucht man eine Erklärung der gemessenen Kurven mit Hilfe der von H. J. Bhabha entwickelten Theorie²⁾, stößt man auf Schwierigkeiten. Bhabha diskutiert unter einigen Annahmen die Absorption der Ultrastrahlung durch Schauererzeugung. Ist X die veränderliche Absorberdicke und D die Reichweite der Schauerteilchen, so hat die Koinzidenzkurve für $X = D$ einen Höchstwert und nimmt für $X > D$ monoton ab. Auf Grund dieser Theorie läßt sich also ohne weiteres nur ein Maximum deuten.

Es soll nicht unterlassen werden, darauf hinzuweisen, daß der gefundene Effekt nicht als Übergangseffekt im üblichen Sinne [Schindler³⁾] erklärbar ist; einmal liegt beim zweiten Maximum kein eigentlicher Übergang vor, da nur Blei als Absorptionsmaterial verwandt wurde, dann aber spielen sich diese Übergangseffekte nach experimentellen Ergebnissen von Schindler und nach einer Abschätzung von Heisenberg⁴⁾ nur in einer Schichtdicke von 1 bis 2 cm Blei ab. Hier handelt es sich aber um eine etwa zehnmal größere Bleischicht.

Während die Kurven I und II der Fig. 13 beide unter ihren Anfangswert heruntergehen — d. h. daß die Absorption bereits die Erzeugung sekundärer Strahlen überwiegt — war das bei Fünfer (Fig. 3) und Rossi wegen zu kleiner Panzerstärken noch nicht erreicht. Die Kurven I und II setzen bei

¹⁾ Erich Regener, Phys. ZS. **34**, 306, 1933. — ²⁾ H. J. Bhabha, ZS. f. Phys. **86**, 120, 1933. — ³⁾ H. Schindler, ebenda **72**, 625, 1931. — ⁴⁾ W. Heisenberg, Ann. d. Phys. (5) **13**, 430, 1932.

der Bleidicke 0 schon mit einem ziemlich hohen Koinzidenzwert ein, während die Fünfersche Fünffachkurve (Fig. 3) etwa bei 0 beginnt. Fünffache Strahlen (bzw. Schauer) scheinen demnach in der Luft kaum zu entstehen.

3. Versuch einer Kurvenanalyse. Unter einfachsten Annahmen soll nun eine Analyse einer der gemessenen Absorptionskurven versucht werden (Kurve II der Fig. 13 und I der Fig. 14 sind identisch). Es soll angenommen werden, daß zwei Komponenten A und B vorhanden sind, deren Sekundärstrahlen die beiden Maxima erzeugen. Dann sei in dem Bereich von etwa 1 bis 3 cm Blei der steile Kurvenabfall auf die Absorption der Komponente A (und ihrer sekundären Strahlungen) zurückzuführen. In diesem Gebiet soll wegen der erheblichen Intensitäts-

änderung von A diejenige von B vernachlässigt werden. Mit anderen Worten: Es soll hier die durch B (bzw. Sekundärstrahlung von B) hervorgerufene Koinzidenzzahl als konstant angesehen werden; sie möge a heißen.

1. Nimmt man für a einen kleinen Wert — etwa 2 — an, und setzt die Zahl der zufälligen Koinzidenzen (Kurve II) ebenfalls = const = 2, so hat man von den Koinzidenzzahlen der Kurve I jeweils vier in Abzug zu bringen. Aus den Intensitätswerten bei 1, 2 und 3 cm Blei wurde nach der Formel $J = J_0 \cdot e^{-\mu \cdot d}$ bei $J_0 = 17,6$ und der jeweiligen Bleidicke d der Massenabsorptionskoeffizient im Mittel zu $\mu_1(A) \cdot g^{-1} = 6,5 \cdot 10^{-3}$ berechnet; mit seiner Hilfe wurde dann die Kurve bis 22 cm Pb extrapoliert (siehe Fig. 14; III). Zwecks Berechnung des μ -Wertes der B -Komponente wurde an den Stellen $x = 17,6$ und 22 cm Pb jeweils von den Werten der Kurve I der entsprechende der extrapolatorisch gewonnenen Kurve III in Abzug gebracht und aus diesen Intensitäten der Koeffizient von B zu $\mu_1(B) \cdot g^{-1} = 1 \cdot 10^{-3}$ bestimmt.

2. Für $a = 6$ ergeben sich entsprechend $\mu_2(A) \cdot g^{-1} = 8,9 \cdot 10^{-3}$ und $\mu_2(B) \cdot g^{-1} = 1,3 \cdot 10^{-3}$ (Kurve IV der Fig. 14). Es wird angenommen,

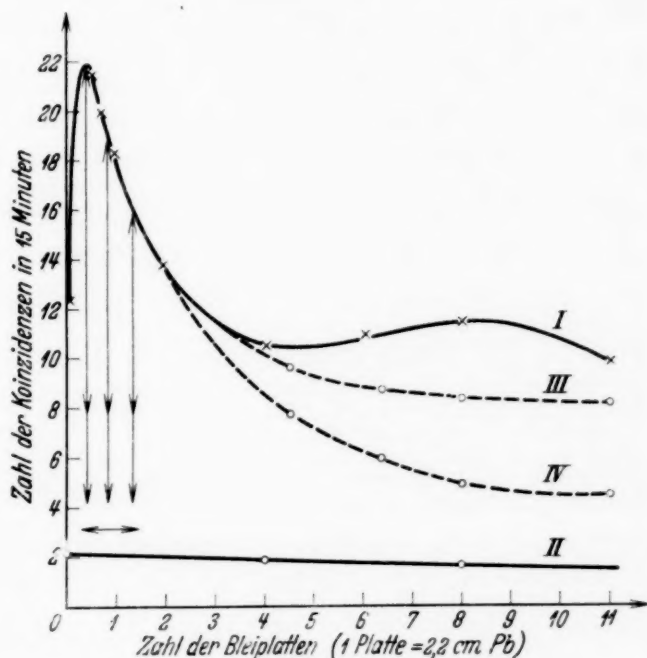


Fig. 14. Zur Kurvenanalyse (s. auch Fig. 13).

daß in Wirklichkeit a nicht außerhalb des Intervalls 2 ... 6 liegt; es wird deshalb geschrieben:

$$\mu(A) \cdot g^{-1} = 6,5 - 8,9 \cdot 10^{-3}, \quad \mu(B) \cdot g^{-1} = 1,0 - 1,3 \cdot 10^{-3}.$$

Zum Vergleich sind in Tabelle 4 die Regenerschen Massenabsorptionskoeffizienten aufgeschrieben¹⁾.

Die Kurven I und II der Fig. 13 zeigen in ihrem ersten Teil (1 bis 2 cm Blei) ein recht unterschiedliches Verhalten. I hat zwei Maxima in diesem Bereich, die Gaußhauskurve nur eins. Unter der Voraussetzung, daß der Kurvenverlauf von I reell ist, wird er auf die Wirkung des Mauerwerks zurückzuführen sein: Die Ultrastrahlung wird in den umgebenden Mauern eine weiche Sekundärstrahlung auslösen; diese und die geschwächte erste Strahlung erzeugen nun im Blei eine tertiäre bzw. sekundäre Strahlung; beide haben ihre Maxima in der Absorptionskurve — aber an verschiedenen Stellen. Diese Erscheinung dürfte also eine Art Übergangseffekt darstellen. Vielleicht ist es aussichtsreich, mit zwei nebeneinander liegenden Zählrohren systematische Untersuchungen von Übergangseffekten vorzunehmen.

Tabelle 4.

Regeners fünf Komponenten der kosmischen Ultrastrahlung.

$$\begin{array}{ll} \mu \cdot g^{-1} (H_2) = 0,205 \cdot 10^{-3} & \mu \cdot g^{-1} (W_1) = 4,1 \cdot 10^{-3} \\ \mu \cdot g^{-1} (H_1) = 0,735 \cdot 10^{-3} & \mu \cdot g^{-1} (W_2) = 8,5 \cdot 10^{-3} \\ \mu \cdot g^{-1} (M) = 2,0 \cdot 10^{-3} & \end{array}$$

Es dürfte interessant sein, Absorptionskurven der in dieser Arbeit besprochenen Art auch mit anderen Panzermaterialien aufzunehmen und den Kurvenverlauf noch weiter — als das hier geschehen ist — zu verfolgen. Auch würde man versuchen können, das zweite Maximum mit mehr als zweifachen Koinzidenzanordnungen zu erhalten.

Zusammenfassung und Schluß.

Es wurde über Experimente mit Zählrohren und Verstärkerapparaturen berichtet; sodann wurden ausgeführte Koinzidenzmessungen besprochen. Mit einer Anordnung von zwei Zählrohren war es gelungen, einen bisher noch nicht bekannten Sekundäreffekt der kosmischen Ultrastrahlung aufzufinden. Dieser wurde ausführlich behandelt.

Herrn Prof. Dr. Angenheister danke ich für sein stetes, förderndes Interesse, Herrn Dr. Hummel für die Anregung zu dieser Arbeit, sowie für seine mannigfachen Unterstützungen bei ihrer Durchführung.

Göttingen, Geophysikalisches Institut der Universität.

¹⁾ Erich Regener, Phys. ZS. **34**, 306, 1933.

Zur Theorie des idealen Gases.

Von **Walter Glaser** in Prag.

(Eingegangen am 14. Februar 1935.)

Durch Übertragung des Wienschen Verschiebungsgesetzes von Licht- auf Materiewellen wird die allgemeine Gestalt der Energieverteilungsfunktion in einem relativistischen Korpuskelgas bestimmt, die notwendig erfüllt sein muß, wenn man allein die Gültigkeit der beiden Hauptsätze der Thermodynamik und das Gesetz der Erhaltung von Energie und Impuls voraussetzt. Das Wiensche Gesetz ist hierin als Spezialfall enthalten. Man erkennt im besonderen, welche Änderungen sich für dieses Gesetz ergeben, wenn man im Sinne von de Broglie¹⁾ den Lichtquanten eine endliche Ruhmasse zuschrieb.

Bei allem Wandel, den die Physik in den letzten Jahren erfahren hat, sind doch — worauf besonders Planck²⁾ hingewiesen hat — die Gesetze der Erhaltung von Impuls und Energie, sowie die beiden Hauptsätze der Thermodynamik unverändert geblieben. Die dynamischen Gesetze und die statistischen Abzählungsmethoden haben sich geändert, die Prinzipie von der Erhaltung der Energie und der Vermehrung der Entropie sind davon unberührt geblieben und werden wohl auch noch weiterhin der physikalischen Forschung zur Richtschnur dienen. Dies legt den Gedanken nahe, einmal die Verteilungsfunktion der Energie in einem relativistischen Korpuskelgas so weit zu bestimmen³⁾, als sie allein durch die eben erwähnten allgemeinen Prinzipie festgelegt ist, ohne also Gebrauch zu machen von einem speziellen Stoßzahlenansatz oder, was dasselbe leisten würde, einer speziellen statistischen Abzählungsmethode in Verbindung mit dem Boltzmannschen Prinzip. Jede explizite Verteilungsfunktion, ganz unabhängig davon, auf welchem Wege sie gewonnen wurde, muß dann die gesuchte Gestalt haben, wenn sie nicht mit den Erhaltungssätzen und den Prinzipien der Thermodynamik in Widerspruch stehen soll, ganz analog wie jedes Strahlungsgesetz die Form des Wienschen Verschiebungsgesetzes besitzen muß, das gleichfalls allein auf einem allgemeinen Satz der Maxwell'schen Theorie und den Sätzen der Thermodynamik beruht. Wir wollen uns überhaupt hier die Überlegungen, die zum Wienschen Gesetz führen, zum Vorbild nehmen, und unseren Beweis im besonderen der schönen Ableitung,

¹⁾ L. de Broglie, Untersuchungen zur Quantentheorie, S. 46ff., Leipzig 1927, und *Actualités scientifiques et industrielles* 181. XIII. Une nouvelle conception de la lumière, S. 33, Cl. (61), S. 47, 48. Paris 1934. — ²⁾ M. Planck, Wege zur physikalischen Erkenntnis, S. 188. Leipzig 1933. — ³⁾ Eine ähnliche Absicht verfolgt auch A. Einstein in seiner Arbeit (Berl. Ber. 1925, S. 18) nach anderer Methode für ein klassisches Korpuskelgas.

die Planck in seiner Theorie der Wärme von diesem Satze gibt, in der Methode ganz eng nachbilden.

Wir betrachten ein relativistisches Korpuskelgas, das sich *nicht* im thermodynamischen Gleichgewicht befinden möge. $n(\varepsilon) d\varepsilon$ sei die Zahl der Teilchen pro Volumeneinheit mit Energien aus dem Bereich ε bis $\varepsilon + d\varepsilon$. Die durch $n(\varepsilon) d\varepsilon$ gegebene Energieverteilung sei zunächst vollkommen willkürlich. Wir denken uns nun (rein als Gedankenexperiment) einen jeden Energieaustausch, wie er sich etwa durch Zusammenstöße zwischen den Teilchen ergeben würde, aufgehoben. Dann wird das Gas in mehrere unabhängige Bestandteile, die jeweils einem anderen Energiebereich angehören, zerfallen, und wir können nach der Energie und der Entropie dieser „ ε -Gase“ fragen. Die Gesamtenergie und Gesamtentropie des Gases wird dann die Summe der Einzelenergien und Einzelentropien seiner unabhängigen „ ε -Bestandteile“ sein. Wir wollen nun dieses Gas komprimieren und nach der Änderung der Entropiedichte $l(\varepsilon) d\varepsilon$ bzw. nach der Änderung der Teilchenanzahl $n(\varepsilon) d\varepsilon$ fragen, die sich durch die elastische Reflexion an der sich infolge der Kompression bewegenden Gefäßwand ergibt. Was uns nämlich interessiert, ist die Entropiedichte $l(\varepsilon, n) d\varepsilon$ eines derartigen „ ε -Gases“ als Funktion seiner Teilchendichte $n(\varepsilon)$ und als Funktion der Größe des „ ε -Quantes“. Da wir nun bei dem Prozeß der elastischen Reflexion an der bewegten Wand die Größe des Energiequants ε und die Teilchenanzahl $n(\varepsilon) d\varepsilon$ in genau berechenbarer Weise verändern können, andererseits aus dem zweiten Hauptsatz wissen, daß sich bei diesem rein dynamischen Prozeß die Entropie des „ ε -Gases“ nicht ändern darf, können wir daraus schließen, wie die Entropiedichte $l(n, \varepsilon)$ von n und ε abhängen muß, damit die Entropie konstant sei. So ist es möglich, die Entropie eines ε -Bestandteils für ein Gas, das sich nicht im thermodynamischen Gleichgewicht befindet, zu bestimmen. Wenn nun die Isolierung zwischen den einzelnen ε -Bestandteilen wieder aufgehoben wird, so wird sich infolge der Wechselwirkung (Zusammenstöße) zwischen den Teilchen gerade diejenige Verteilung $n(\varepsilon) d\varepsilon$ automatisch einstellen, welche die Gesamtentropie des Gases zu einem Maximum macht. Was wir suchen, ist gerade diese Verteilung mit maximaler Gesamtentropie, die für das thermodynamische Gleichgewicht charakteristisch ist. Man erkennt hieraus, daß die unabhängigen „ ε -Bestandteile“ zu den verschiedenen Strahlenbündeln des Hohlraumes in Analogie stehen und daß das „Hereinbringen des Kohlenstäubchens“ in den Strahlungshohlraum der Aufhebung der energetischen Isolation zwischen den einzelnen ε -Bestandteilen beim Korpuskelgas entspricht. Man könnte hierzu bemerken, daß die Analogie zwischen Gas und

Strahlungshohlraum deshalb nicht vollständig ist, weil durch die Absorption und Emission des Kohlenstäubchens die Anzahl der im Volumen vorhandenen Lichtquanten verändert wird, während die Teilchenzahl beim Gase auch bei den Zusammenstößen erhalten bleibt. Nun, wenn wir aber statt des Kohlenstäubchens Elektronen in den Hohlraum einbringen, werden diese infolge der stattfindenden Compton-Stöße wohl einen Ausgleich zwischen den Frequenzen der einzelnen Strahlungsbündel, wie er dem normalen Spektrum der schwarzen Strahlung entspricht, herbeiführen, ohne jedoch die Zahl der Lichtquanten zu verändern. Wir hätten somit auch in diesem Punkte vollständige Übereinstimmung mit dem Korpuskelgas.

Wir berechnen nun die Energieänderung, die ein relativistisch bewegtes Teilchen bei der Reflexion an einer langsam bewegten Wand erfährt. „Langsam“ soll bedeuten, daß die Geschwindigkeit v der Wand klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit c sei, so daß wir nur die Glieder erster Ordnung in v/c berücksichtigen brauchen. Da es auf die Geschwindigkeit der Wand bei den folgenden Rechnungen nicht ankommen kann, bedeutet dies keine Einschränkung für die Gültigkeit der erhaltenen Resultate. Ist ε_1 die Energie des auffallenden, ε diejenige des reflektierten Teilchens, so gibt der Energiesatz

$$\varepsilon_1 + dA = \varepsilon, \quad (1)$$

wobei dA die während der Stoßdauer an der Wand am Teilchen geleistete Arbeit bedeutet. Diese können wir nach dem Impulssatz berechnen, nach dem das Zeitintegral über die Kraft, gleich der während dieser Zeit erfolgten gesamten Impulsänderung ist. Es gilt also, wenn g_1 , ϑ_1 Impuls und Einfallswinkel für das auffallende Teilchen und g , ϑ die entsprechenden Größen für das reflektierte Teilchen sind:

$$K dt = g_1 \cos \vartheta_1 + g \cos \vartheta. \quad (2)$$

Denn der Impuls $g_1 \cos \vartheta_1$ des einfallenden Teilchens senkrecht zur Wand wird vernichtet und $g \cos \vartheta$ neu geschaffen. In der Zeit dt möge sich die Wand um das Stück dx senkrecht zu sich selbst verschoben haben. Es ist also $dx/dt = v$ ihre Geschwindigkeit. Multiplizieren wir nun (2) mit dx und dividieren wir zugleich durch dt , so erhalten wir für

$$dA = K dx = v (g_1 \cos \vartheta_1 + g \cos \vartheta).$$

Zwischen ε und g besteht nun die Beziehung $g = \frac{1}{c} \sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2}$, welche aus den Definitionen $g = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, $\varepsilon = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ und $\varepsilon_0 = m_0 c^2$ folgt.

Da außerdem der Impuls parallel zur Wand beim Stoß nicht geändert werden kann, gilt somit

$$\varepsilon_1 + \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_0^2} \cos \vartheta_1 = \varepsilon - \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2} \cos \vartheta, \quad (3)$$

$$g_1 \sin \vartheta_1 = g \sin \vartheta. \quad (4)$$

Ist die Geschwindigkeit der Wandbewegung nun so klein, daß $v/c \ll 1$ ist, so folgt aus (3) und (4)

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \left(1 + \frac{w}{c} \frac{\sqrt{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_0^2}}{\varepsilon_1} \cos \vartheta_1 \right), \quad (5a)$$

$$\sin \vartheta = \sin \vartheta_1 \left(1 - \frac{w}{c} \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_0^2}} \cos \vartheta_1 \right), \quad (5b)$$

$$\cos \vartheta = \cos \vartheta_1 + \frac{w}{c} \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_0^2}} \sin^2 \vartheta_1. \quad (5c)$$

Für den Druck p' senkrecht zur Wand der aus dem Raumwinkel $d\Omega_1$ mit der Richtung ϑ_1 einfallenden Teilchen ergibt sich, wenn w_1 die Geschwindigkeit der Teilchen bedeutet,

$$p' = g_1 n(\varepsilon_1) w_1 \frac{d\Omega_1}{4\pi} \cos^2 \vartheta_1 d\varepsilon_1 \quad (7a)$$

oder mit

$$g = \frac{1}{c} \sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2} \quad \text{und} \quad w = c \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2}}{\varepsilon} \quad (6)$$

ist dies

$$p' = \frac{d\Omega_1}{4\pi} \frac{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_0^2}{\varepsilon} n(\varepsilon_1) \cos^2 \vartheta_1 d\varepsilon. \quad (7b)$$

Analog folgt für den Druck p'' der in den Raumwinkel $d\Omega$ reflektierten Teilchen

$$p'' = \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2}{\varepsilon} n(\varepsilon) \cos^2 \vartheta d\varepsilon.$$

Der Gesamtdruck ist also gegeben durch

$$p = p' + p'' = n(\varepsilon) \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2}{\varepsilon} \frac{d\Omega}{4\pi} \cos^2 \vartheta d\varepsilon + n(\varepsilon_1) \frac{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_0^2}{\varepsilon_1} \frac{d\Omega_1}{4\pi} \cos^2 \vartheta_1 d\varepsilon_1. \quad (7)$$

¹⁾ Die Formeln (5a–c) könnte man besonders einfach auch mittels der relativistischen Transformationsgleichungen für Impuls und Energie erhalten. Dazu müßte man nur die in einem mit der Wand mitbewegten System gültige Beziehung, der Gleichheit von Impuls und Energie der auffallenden und reflektierten Teilchen, auf ein ruhendes System umrechnen.

Die auf die Flächeneinheit der bewegten Wand in der Zeiteinheit aus $d\Omega_1$ auffallende Energie ist

$$u' = \varepsilon_1 n(\varepsilon_1) \frac{d\Omega_1}{4\pi} (w_1 \cos \vartheta_1 + v) d\varepsilon_1, \quad (8)$$

wobei $w_1 \cos \vartheta_1 + v$ die Relativgeschwindigkeit der Teilchen senkrecht zur Wand bedeutet. Die reflektierte Energie wird

$$u'' = \varepsilon n(\varepsilon) \frac{d\Omega}{4\pi} (w \cos \vartheta - v) d\varepsilon, \quad (9)$$

da die Relativgeschwindigkeit der reflektierten Teilchen senkrecht zur Wand $w \cos \vartheta - v$ ist. Für w haben wir hier nach (6) $c \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2}}{\varepsilon}$ zu setzen. Das Energieprinzip verlangt nun, daß die Differenz zwischen reflektierter und auffallender Energie gleich sein muß der vom Druck geleisteten Arbeit. Also $u'' - u' = pv$ oder

$$\begin{aligned} \varepsilon n(\varepsilon) d\Omega d\varepsilon \left[\frac{\sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2}}{\varepsilon} \cos \vartheta - \frac{v}{c} \right] - \varepsilon_1 n(\varepsilon_1) d\Omega_1 d\varepsilon_1 \left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_0^2}}{\varepsilon_1} \cos \vartheta_1 + \frac{v}{c} \right] \\ = \frac{v}{c} \left[n(\varepsilon) \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2}{\varepsilon} d\Omega \cos^2 \vartheta d\varepsilon + n(\varepsilon_1) \frac{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_0^2}{\varepsilon_1} d\Omega_1 \cos^2 \vartheta_1 d\varepsilon_1 \right], \quad (10) \end{aligned}$$

wobei wir statt des Druckes auf die bewegte den auf die ruhende Wand ausgeübten Druck setzen konnten, denn die Berücksichtigung dieses Umstandes würde nur eine Korrektur von Gliedern zweiter Ordnung in (10) ergeben. Man ersieht dies am besten aus (7a), in der $w_1 \cos \vartheta_1$ durch die Relativgeschwindigkeit $w_1 \cos \vartheta_1 + v$ zu ersetzen wäre. Analog wäre mit (7b) zu verfahren. Da aber diese Größen in (10) mit v/c multipliziert werden, ist diese Korrektur nur von zweiter Ordnung. (10) können wir noch in folgender Form schreiben:

(I. Hauptsatz)

$$\frac{\varepsilon n(\varepsilon) d\Omega d\varepsilon \left[\frac{\sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2}}{\varepsilon} \cos \vartheta - \frac{v}{c} - \frac{v}{c} \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2}{\varepsilon^2} \cos^2 \vartheta \right]}{\varepsilon_1 n(\varepsilon_1) d\Omega_1 d\varepsilon_1 \left[\frac{\sqrt{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_0^2}}{\varepsilon_1} \cos \vartheta_1 + \frac{v}{c} + \frac{v}{c} \frac{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_0^2}{\varepsilon_1^2} \cos^2 \vartheta_1 \right]} = 1, \quad (11)$$

als Ausdruck des ersten Hauptsatzes angewandt auf den Prozeß der elastischen Reflexion relativistisch bewegter Teilchen.

Wir berechnen zunächst

$$\frac{d\Omega d\varepsilon}{d\Omega_1 d\varepsilon_1} = \frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta_1} \frac{d\vartheta d\varepsilon}{d\vartheta_1 d\varepsilon_1} = \frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta_1} \frac{\partial(\vartheta, \varepsilon)}{\partial(\vartheta_1, \varepsilon_1)} = \frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta_1} \frac{\partial \vartheta}{\partial \vartheta_1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_1},$$

da $\frac{\partial \varepsilon}{\partial v_1} \frac{\partial \vartheta}{\partial \varepsilon_1}$ nach (5a), (5b), (5c) in der Funktionaldeterminante von zweiter Ordnung in v/c ist. Aus (5c) und (5a) und (5b) folgt

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega d\varepsilon}{d\Omega_1 d\varepsilon_1} &= \left[1 - \frac{4v}{c} \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_0^2}} \cos \vartheta_1\right] \left[1 + \frac{v}{c} \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_0^2}} \cos \vartheta_1\right] \\ &= \frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_0^2}{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Weiter können wir nach (11) schreiben mit Benutzung von (5a)

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2}}{\varepsilon} \cos \vartheta - \frac{v}{c} - \frac{v}{c} \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2}{\varepsilon^2} \cos^2 \vartheta \\ &\frac{\sqrt{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_0^2}}{\varepsilon_1} \cos \vartheta_1 + \frac{v}{c} + \frac{v}{c} \frac{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_0^2}{\varepsilon_1^2} \cos^2 \vartheta_1 \\ &= \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon^2} \sqrt{\frac{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2}{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_0^2}} \frac{\cos \vartheta + \frac{v}{c} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2}}}{\cos \vartheta_1 + \frac{v}{c} \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_0^2}}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Da aber nach (5c) und (5a)

$$\frac{\cos \vartheta - \frac{v}{c} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2}}}{\cos \vartheta_1 + \frac{v}{c} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_0^2}}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_0^2}{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2}} \quad (14)$$

ist, erhält somit der erste Hauptsatz (11) mit Rücksicht auf (12), (13), (14) die Gestalt

$$\boxed{\frac{n(\varepsilon)}{\varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2}} = \frac{n(\varepsilon_1)}{\varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_0^2}}}. \quad (15)$$

Da bei dem rein mechanischen Prozeß der elastischen Reflexion die Entropie nicht geändert werden kann, erhalten wir als Bedingung dafür, daß die auf-fallende Entropie gleich der reflektierten ist, analog wie früher die Beziehung

(II. Hauptsatz)

$$\frac{l d\varepsilon d\Omega \left(\frac{\sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2}}{\varepsilon} \cos \vartheta - \frac{v}{c} \right)}{l d\varepsilon_1 d\Omega_1 \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_0^2}}{\varepsilon_1} \cos \vartheta_1 + \frac{v}{c} \right)} = 1 \quad (16)$$

als Ausdruck des zweiten Hauptsatzes. Wenn wir für $d\varepsilon d\Omega$ aus (12) einsetzen und im Zähler und Nenner dieses Ausdruckes $1/\varepsilon$ bzw. $1/\varepsilon_1$ herausheben, erhalten wir auf Grund von (14) die Beziehung

$$\frac{l(n, \varepsilon)}{\varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2}} = \frac{l(n_1, \varepsilon_1)}{\varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_0^2}}, \quad (17)$$

die uns zusammen mit (15) das Gesetz angibt, nach denen sich Teilchenzahl $n(\varepsilon)$ und Entropiedichte $l(n, \varepsilon)$ bei der elastischen Reflexion ändern.

Nun muß die Entropiedichte $l(n, \varepsilon)$, wie bereits erwähnt, im allgemeinsten Falle eine Funktion der Teilchendichte $n(\varepsilon)$ und der Größe ε des Energiequants sein:

$$l(n, \varepsilon) = \psi(n(\varepsilon), \varepsilon);$$

vollkommen gleichbedeutend hiermit können wir auch schreiben

$$\frac{l}{\varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2}} = f\left(\frac{n(\varepsilon)}{\varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2}}, \varepsilon\right).$$

Da nun bei dem soeben betrachteten Prozeß sowohl die linke Seite dieser Gleichung wie auch $\frac{n(\varepsilon)}{\varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2}}$ unverändert bleiben, die Größe ε aber nach (5a) geändert wird, muß f von ε unabhängig sein. Es gilt somit

$$l(n, \varepsilon) = \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2} f\left(\frac{n(\varepsilon)}{\varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2}}\right). \quad (18)$$

Wenn wir nun die Teilchen aufeinander einwirken lassen, wenn sie also etwa durch Zusammenstöße in gegenseitigen Energieaustausch treten, so wird sich bei konstanter Gesamtteilchenzahl und konstanter Gesamtenergie gerade eine solche Verteilung $n(\varepsilon) d\varepsilon$ einstellen, daß sie die Gesamtentropie

$$S = Vs = Vk \int_{\varepsilon_0}^{\infty} l(n, \varepsilon) d\varepsilon \quad (19)$$

zu einem Maximum macht. s bedeutet die Entropiedichte, und k ist eine Konstante von der Dimension einer Entropie, also von der Dimension Energie durch Temperatur, wenn wir $Vl(n, \varepsilon)$ als dimensionslose Funktion voraussetzen wollen. Es ist also

$$\delta S = Vk \delta \int_{\varepsilon_0}^{\infty} l(n, \varepsilon) d\varepsilon = 0 \quad (20)$$

unter den beiden Nebenbedingungen

$$\delta N = V \delta \int_{\varepsilon_0}^{\infty} n(\varepsilon) d\varepsilon = 0 \quad \text{und} \quad \delta u = V \delta \int_{\varepsilon_0}^{\infty} \varepsilon n(\varepsilon) d\varepsilon = 0. \quad (21)$$

Die Variationen sind dabei in bezug auf die Argumentfunktion $n(\varepsilon)$ zu bilden. Dies ergibt, wenn wir die beiden Lagrangeschen Faktoren mit λ und μk bezeichnen,

$$\frac{\partial l}{\partial n} = \frac{\lambda \varepsilon}{k} + \mu = f'(\alpha), \quad \alpha = \frac{n(\varepsilon)}{\varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2}}. \quad (22)$$

Durch Auflösung nach dem Argument α erhalten wir daraus für die Verteilungsfunktion im thermodynamischen Gleichgewicht

$$n(\varepsilon) = \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2} \psi\left(\frac{\lambda \varepsilon}{k} + \mu\right).$$

Die Konstante λ können wir noch durch Betrachtung eines isochoren Prozesses auf Grund des Entropiesatzes

$$T \delta S = \delta u, \quad k \int_0^\infty T d\varepsilon - \int_0^\infty \varepsilon \delta n d\varepsilon = 0$$

bestimmen. Setzen wir für δl den oben gefundenen Wert $\delta l = \left(\frac{\lambda \varepsilon}{k} + \mu\right) \delta n$ ein, so ergibt sich

$$\int_0^\infty [(\lambda \varepsilon + \mu k) T - \varepsilon] \delta n d\varepsilon = 0,$$

und da wegen Erhaltung der Teilchenzahl $\mu k \int_0^\infty \delta n d\varepsilon$ verschwindet, folgt hieraus

$$\int_0^\infty (\lambda T - 1) \varepsilon \delta n d\varepsilon = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{1}{T}. \quad (23)$$

Jede Verteilungsfunktion relativistisch bewegter Teilchen muß also notwendig die Gestalt haben

$$n(\varepsilon) d\varepsilon = \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2} \psi\left(\frac{\varepsilon}{kT} + \mu\right) d\varepsilon.$$

(24)

Die hierin noch auftretende von ε unabhängige Größe μ bestimmt sich aus der Gesamtanzahl der Teilchen durch

$$N = V \int_{\varepsilon_0}^\infty n(\varepsilon) d\varepsilon = V \int_{\varepsilon_0}^\infty \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2} \psi\left(\frac{\varepsilon}{kT} + \mu\right) d\varepsilon, \quad (25)$$

sie ist also bei gegebenem $\psi(x)$ als bekannt zu betrachten. Durch unsere Überlegungen ist also für ein Gas dasselbe geleistet wie durch das Wiensche Gesetz für den analogen Fall der Hohlraumstrahlung; es ist die zunächst unbekannte Verteilungsfunktion, die von zwei Argumenten ε und T abhängt, auf eine unbekannte Funktion von nur einem Argument reduziert.

Die Funktion $\psi(x)$ in (24), die von dem dimensionslosen Argument $x = \frac{\varepsilon}{kT} + \mu$ abhängt, ist selbst nicht dimensionslos, da dies für $\varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2}$ nicht der Fall ist. Wegen (6) ist aber $c^3 g^2 dg = \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2} d\varepsilon$. Da andererseits das Phasenraumelement $dp_x dp_y dp_z$ durch $4\pi g^2 dg$ gegeben ist, können wir in (24) $\varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2}$ durch $dp_x dp_y dp_z$ ersetzen, wenn wir die belanglose Konstante $c^3/4\pi$ in die Funktion $\psi(x)$ hineinziehen. Die Funktion ψ wird im besonderen dimensionslos, wenn wir $V dp_x dp_y dp_z$ durch eine Konstante der gleichen Dimension, also durch die dritte Potenz einer Größe h , von der Dimension einer Wirkung dividieren. Damit erhalten wir für die Verteilungsfunktion $dN(\varepsilon) = V n(\varepsilon) d\varepsilon$ die endgültige Gestalt

$$dN(\varepsilon) = V n(\varepsilon) d\varepsilon = \psi\left(\frac{\varepsilon}{kT} + \mu\right) \frac{V dp_x dp_y dp_z}{h^3}, \quad (26)$$

in der somit nun ψ eine dimensionslose Funktion ihres Argumentes darstellt, da ja dN eine reine Zahl ist. Für den Fall relativistisch bewegter Teilchen nimmt (26) wegen $dp_x dp_y dp_z = \frac{4\pi}{c^3} \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2} d\varepsilon$ die Gestalt an:

$$dN(\varepsilon) = \frac{4\pi V}{h^3} \psi\left(\frac{\varepsilon}{kT} + \mu\right) \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2} d\varepsilon. \quad (27)$$

Setzt man $\psi(x) = e^{-x}$, so erhält man das Maxwell-Boltzmannsche Verteilungsgesetz, und Gleichung (27) ergibt mit dieser Funktion die Energieverteilung in einem relativistischen Korpuskelgas, wie sie von F. Jüttner¹⁾ untersucht worden ist. Setzt man dagegen für $\psi(x)$ die Plancksche Funktion $\psi(x) = \frac{1}{e^x - 1}$, wie sie der Boseschen Statistik entspricht, so erhält man in (27) die Verteilungsfunktion, die einem relativistischen (entarteten) Einstein-Gas entspricht²⁾. Setzen wir $\varepsilon = \varrho + \varepsilon_0$, und ist die Energie ϱ gegenüber der Ruhenergie ε_0 klein, so haben wir den Fall von klassisch bewegten Korpuskeln und erhalten mit der obigen Verteilungsfunktion die Gesetze der Maxwell-Boltzmannschen bzw. der von Einstein³⁾ entwickelten Gastheorie. Der andere Grenzfall ist der, daß ϱ groß ist gegen die Ruhenergie ε_0 . Setzen wir ε_0 überhaupt gleich Null und sehen wir außerdem von der ersten Nebenbedingung der Konstanz der

¹⁾ F. Jüttner, Ann. d. Phys. **34**, 856, 1911. — ²⁾ Wir behandeln dieses Gas, das sowohl Lichtquanten, also die Gesetze des Strahlungshohlraumes, wie auch materielle Korpuskeln umfaßt, in einer folgenden Arbeit. —

³⁾ A. Einstein, Berl. Ber. 1924, S. 261.

Teilchenanzahl in (21) ab, setzen also $\mu = 0$, so ergibt sich für die Energiedichte dieses „Lichtquantengases“ nach (24)

$$u(\varepsilon) = \varepsilon n(\varepsilon) = \varepsilon^3 \psi\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right), \quad (28)$$

also mit $\varepsilon = h\nu$ das Wiensche Verschiebungsgesetz. Würden wir aber gemäß dem Vorschlag von L. de Broglie die Lichtquanten als relativistisch bewegte Teilchen von zwar sehr kleiner, aber doch endlicher Ruhmasse auffassen, so würde das Wiensche Gesetz mit der Konstanten $\nu_0 = \varepsilon_0/h = m_0 c^2/h$ für „schweres Licht“ die Gestalt annehmen:

$$u(\nu) = \nu^2 \sqrt{\nu^2 - \nu_0^2} \psi\left(\frac{\nu}{T}\right). \quad (29)$$

Auch der Materialeinfluß auf die Strahlungsdichte, der sich bekanntlich auf Grund der Gesetze der elektromagnetischen Lichttheorie und durch energetische Überlegungen¹⁾ ergibt, kann im Anschluß an Gleichung (26) unmittelbar erschlossen werden. Wegen $dp_x dp_y dp_z = 4\pi g^2 dg$ folgt, wenn für $g = \frac{h\nu}{q} = \frac{h\nu}{c} \cdot \frac{c}{q} = \frac{h\nu}{c} n$ (n Brechungsindex des Mediums!) gesetzt wird und wieder belanglose Konstanten in ψ bineingezogen werden:

$$u(\nu) = n^3 \nu^3 \psi\left(\frac{\nu}{T}\right). \quad (30)$$

Es ist somit u/n^3 oder $u(\nu) q^3$ eine universelle, vom speziellen durchstrahlten Medium unabhängige Funktion.

Die Analogie mit dem Wienschen Gesetz tritt vielleicht noch stärker hervor, wenn wir an Stelle des elastischen Stoßes der Teilchen, die Reflexion der entsprechenden Materiewellen an der bewegten Gefäßwand unseren Betrachtungen zugrunde legen, ganz ebenso wie man beim Beweise des Wienschen Gesetzes die Reflexion der elektromagnetischen Wellen am bewegten Spiegel benutzt, um die zu (5, a—c) analogen Gleichungen für die Änderung von Frequenz und Einfallswinkel herzuleiten. Statt von den „ ε -Bestandteilen“ des Gases könnten wir dann von den entsprechenden Wellenbündeln der Materiewellen sprechen und im übrigen den Beweis des Verteilungsgesetzes (24) vollkommen parallel zum Wienschen Gesetz der Hohlraumstrahlung führen. Daß wir so tatsächlich zu den Gleichungen (5, a—c) kommen, erkennt man so:

¹⁾ M. Planck, Theorie der Wärme. S. 160. Leipzig 1930.

Die Phase φ der Materiewelle sei $\varphi = 2\pi\left(vt - \frac{x}{\lambda}\right)$, wobei x die längs der Wellennormale genommene Abszisse ist. Nehmen wir die positive Koordinatenrichtung ξ senkrecht zur Wand und nach unten, die Koordinate η parallel zur Wand und nach links gerichtet an, ist schließlich noch ϑ der Einfallswinkel der Welle, so ergibt sich $x = \xi \cos \vartheta + \eta \sin \vartheta$ und die Phase der Welle erhält die Form

$$\varphi = 2\pi\left(vt - \frac{\xi \cos \vartheta + \eta \sin \vartheta}{\lambda}\right). \quad (31)$$

Mit den de Broglieschen Beziehungen

$$\varepsilon = h\nu, \quad g = \frac{h}{\lambda} \quad (31a)$$

ergibt sich für die Phase der einfallenden Welle

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{h} [\varepsilon_1 t - g_1 (\xi \cos \vartheta_1 + \eta \sin \vartheta_1)]. \quad (32)$$

Analog erhält man für die reflektierte Welle

$$\varphi = \frac{2\pi}{h} [\varepsilon t - g (-\xi \cos \vartheta + \eta \sin \vartheta)]. \quad (33)$$

Wenn sich die Wand mit der Geschwindigkeit v der auffallenden Welle entgegenbewegt, so hat man $\xi = -vt$ zu schreiben. Nun müssen aber die Phasen φ_1 und φ der einfallenden bzw. der reflektierten Welle an der Wand für alle Zeiten übereinstimmen. Setzt man daher $\xi = -vt$ in (32) und (33) ein, so hat man die Koeffizienten von t und η in φ_1 mit den entsprechenden in φ gleichzusetzen, was

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 + g_1 v \cos \vartheta_1 &= \varepsilon - gv \cos \vartheta, \\ g_1 \sin \vartheta_1 &= g \sin \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

ergibt. Das aber sind die Beziehungen (5, a—c).

Nebenbei sei bemerkt, daß die hier besprochene Reflexion an der bewegten Wand in Verbindung mit den Gesetzen des elastischen Stoßes (5, a—c) bzw. (34) eine Methode ergibt, um die de Broglieschen Beziehungen (31a) zu begründen. Denn einerseits finden wir aus Energie- und Impulssatz entsprechend den Gleichungen (3) und (4)

$$\varepsilon_1 + g_1 v \cos \vartheta = \varepsilon - gv \cos \vartheta, \quad (34a)$$

$$g_1 \sin \vartheta_1 = g \sin \vartheta. \quad (34b)$$

Andererseits aber ergibt die Reflexion der Phasenwelle

$$\varphi = 2\pi\left[v t - \frac{\xi \cos \vartheta + \eta \sin \vartheta}{\lambda}\right],$$

(wenn ein Phasensprung ausgeschlossen wird!) an der bewegten Wand

$$r_1 + \frac{1}{\lambda_1} v \cos \vartheta = r - \frac{1}{\lambda} v \cos \vartheta, \quad (35a)$$

$$\frac{1}{\lambda_1} \sin \vartheta_1 = \frac{1}{\lambda} \sin \vartheta. \quad (35b)$$

Wenn also zwischen den mechanischen Größen ε, g und den undulatorischen r, λ eine Relation bestehen soll, so kann sie somit nur die Gestalt der de Broglieschen Beziehungen (31 a) haben. Denn dividieren wir (34b) durch (35b), so ergibt sich

$$g_1 \lambda_1 = g \lambda = h \quad (h \text{ ist eine Konstante!}). \quad (36a)$$

Durch Subtraktion von (34a) und (35a) erhält man aber mit Rücksicht auf (36a)

$$\varepsilon_1 - h r_1 = \varepsilon - h r = A \quad (\text{wobei } A \text{ wieder eine Konstante bedeutet}), \quad (36b)$$

(36a) und (36b) sind aber mit den de Broglieschen Beziehungen (B) (wenn $A = 0$ gesetzt wird) identisch.

Prag, Institut für theoretische Physik der Deutschen Universität.

Zur Theorie des Elektronenmikroskops mit Anwendung auf rein magnetische Felder.

Von **R. Wallauschek** und **P. Bergmann** in Prag.

Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 14. Februar 1935.)

Es werden die allgemeinen Differentialgleichungen für Elektronenstrahlen in axialsymmetrischen Feldern nochmals kurz zusammenhängend dargestellt und für Gaußsche Dioptrik und für rein magnetische Felder spezialisiert. Es werden die durch rein magnetische Linsen vermittelten elektronenoptischen Abbildungen an Hand einiger Beispiele diskutiert und eine allgemeine Methode angegeben, um bei beliebiger Verteilung der magnetischen Feldstärke die optischen Konstanten des Systems zu bestimmen.

Für die Betrachtung des Bahnverlaufs bewegter Elektronen in einem Magnetfeld und deren Auswertung für eine optische Abbildung wurden fast durchweg die von H. Busch¹⁾ angegebenen Beziehungen für die optischen Konstanten verwendet. Die Ableitung dieser Formeln geschieht jedoch unter Voraussetzungen, die bei den praktischen Anwendungen nicht immer erfüllt zu sein scheinen. Die vorliegende Arbeit versucht, unter allgemeineren Voraussetzungen relativ leicht auswertbare Beziehungen für die Charakterisierung der elektronenoptischen Wirkungsweise eines Magnetfeldes zu liefern. Vor allem soll nach der von W. Glaser²⁾ angegebenen allgemeinen Theorie der Weg zur Erlangung von Differentialgleichungen für Elektronenbahnen angegeben werden und im Anschluß daran die auf den Gaußschen Strahlengang spezialisierten Differentialgleichungen zur expliziten Durchrechnung von Kreisstrom und anderen Magnetfeldern verwendet werden. Die gleichfalls von Glaser entwickelte Bildfehlertheorie, auf die Durchrechnung spezieller Felder angewandt, soll einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben.

1. Herleitung des Variationsproblems für Elektronenbahnen im rotations-symmetrischen elektromagnetischen Feld.

Die relativistische Bewegungsgleichung eines Elektrons mit der Ruhmasse m_0 und der Ladung e im elektromagnetischen Feld, das charakterisiert ist durch das skalare Potential Φ und das Vektorpotential \mathfrak{A}

$$\mathfrak{E} = -\text{grad } \Phi, \quad \mathfrak{H} = \text{rot } \mathfrak{A} \quad (1a)$$

¹⁾ H. Busch, Ann. d. Phys. **81**, 974, 1926; Arch. f. Elektrotechn. **18**, 583, 1927, zitiert als B. — ²⁾ W. Glaser, Ann. d. Phys. **18**, 557, 1933, zitiert als G 1; ZS. f. Phys. **80**, 451, 1933, zitiert als G 2; ebenda **81**, 647, 1933, zitiert als G 3; ebenda **83**, 104, 1933, zitiert als G 4.

lautet

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = -e \operatorname{grad} \Phi + \frac{e}{c} (\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathfrak{A}). \quad (1)$$

Zur Umformung dieser Differentialgleichung in ein Variationsprinzip führt die Umkehrung des Weges, den man zur Herleitung der Euler-Lagrangeschen Gleichungen aus dem Hamiltonschen Prinzip verwendet.

Das Hamiltonsche Prinzip

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) dt = 0 \quad (2)$$

läßt sich in der bekannten Weise¹⁾ umformen zu

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\nabla L - \frac{d}{dt} (\nabla L) \right] \delta \mathbf{r} dt = 0, \quad (2a)$$

wobei ∇ die übliche vektorielle Abkürzung für $\partial/\partial x, \dots$ und ∇ die für $\partial/\partial \dot{x}, \dots$ bedeutet. Die die Bahnkurven liefernden Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen von (2) sind dann die drei Gleichungen

$$\nabla L - \frac{d}{dt} (\nabla L) = 0. \quad (2b)$$

Aus der Differentialgleichung (1) ergibt sich durch Umkehrung des skizzierten Weges das Variationsproblem

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[-\frac{d}{dt} \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - e \operatorname{grad} \Phi + \frac{e}{c} (\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathfrak{A}) \right] \delta \mathbf{r} dt = 0. \quad (3a)$$

Mit Hilfe der leicht nachprüfbaren Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} -\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \delta \mathbf{r} dt &= \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \delta [m_0 c^2 (1 - \sqrt{1-v^2/c^2})] - \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \delta \mathbf{r} \right) \right\} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \delta [m_0 c^2 (1 - \sqrt{1-v^2/c^2})] dt \quad (\delta \mathbf{r}(t_0) = \delta \mathbf{r}(t_1) = 0), \end{aligned} \right\} \quad (3b)$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} e \operatorname{grad} \Phi \delta \mathbf{r} dt = -\int_{t_0}^{t_1} \delta (e \Phi) dt, \quad (3c)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \frac{e}{c} (\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathfrak{A}) \delta \mathbf{r} dt &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{e}{c} \operatorname{rot} \mathfrak{A} (\delta \mathbf{r} \times d\mathbf{s}) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{e}{c} \operatorname{rot} \mathfrak{A} d\mathfrak{f} \\ &= \oint \frac{e}{c} \mathfrak{A} d\mathbf{s} = \delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{e}{c} (\mathfrak{A} \mathbf{v}) dt, \end{aligned} \right\} \quad (3d)$$

¹⁾ Frank-Mises, Bd. I, S. 230ff. II. Aufl.

erhält (3a) die übliche Form des Hamiltonschen Prinzips

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left[m_0 c^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) - e\Phi + \frac{e}{c} (\mathfrak{A} \mathbf{v}) \right] dt = 0. \quad (3)$$

Sieht man von der Massenvariabilität ab, so erhält L die einfachere Gestalt

$$L = \frac{mv^2}{2} - e\Phi + \frac{e}{c} (\mathfrak{A} \mathbf{v}). \quad (3e)$$

In der folgenden Entwicklung soll immer der Ausdruck (3) verwendet werden; die einfachere Rechnung mit (3e) läuft ganz parallel mit der angegebenen.

Zur Elimination der Zeit t aus (3) ist es vorteilhaft, einen allgemeinen Parameter u durch

$$t = t(u), \quad \frac{dt}{du} = t' \quad (4a)$$

einzuführen. Sind x, y, z die Cartesischen Koordinaten des Elektrons und \mathfrak{s} der Einheitsvektor in dessen Bahnrichtung, so erhält (3) die Form

$$\delta \int \left[m_0 c^2 \left(t' - \sqrt{t'^2 - \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{c^2}} \right) - e\Phi t' + \frac{e}{c} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} (\mathfrak{A} \mathfrak{s}) \right] du = \delta \int G(x, y, z, x', y', z', t') du = 0. \quad (4)$$

Die zu t' gehörende Euler-Lagrangesche Differentialgleichung dieses Variationsproblems liefert das Energieintegral

$$G_t = m_0 c^2 - e\Phi - \frac{m_0 c^2 t'}{\sqrt{t'^2 - \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{c^2}}} = -E, \quad (5)$$

woraus sich $t' = f(x, y, z, x', y', z')$ errechnen läßt.

Geht $G(x, y, z, x', y', z', t')$ durch Einsetzen von $t' = f(x, y, z, x', y', z')$ in eine Funktion $F(x, y, z, x', y', z')$ über, so liefert das von t freie Variationsproblem

$$\delta \int (F + E f) du = 0 \quad (6a)$$

als Extremalen wieder die Bahnkurven (1)¹⁾.

Es lautet explizit

$$\delta \int \left[\frac{1}{c} \sqrt{(E - e\Phi)(E - e\Phi + 2m_0 c^2)} + \frac{e}{c} (\mathfrak{A} \mathfrak{s}) \right] \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} du = 0. \quad (6)$$

Dieses Variationsproblem für die Elektronenbahnen ist das Analogon zu dem Fermatschen Prinzip für die Lichtstrahlen in der geometrischen Optik

$$\delta \int \mu ds = \delta \int \mu \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} du = 0, \quad (7)$$

¹⁾ Spezialfall des Satzes von Routh; siehe auch Frank-Mises, Bd. II, S. 60. II. Aufl. Eine direkte Ableitung bei G 1, S. 561.

(μ = Brechungsindex) („Hamiltonsche Analogie zwischen Optik und Mechanik“). Es können Elektronenbahnen im Felde \mathfrak{A} , Φ mit demselben mathematischen Formalismus behandelt werden wie Lichtstrahlen in einem Medium mit dem variablen Brechungsindex

$$\mu = \frac{1}{c} \sqrt{(E - e\Phi)(E - e\Phi + 2m_0c^2)} + \frac{e}{c} (\mathfrak{A} \mathfrak{s}), \quad (8)$$

$$= \mu_0 + \frac{e}{c} (\mathfrak{A} \mathfrak{s}).$$

Man definiert sinngemäß μ als den elektronenoptischen Brechungsindex des Feldes \mathfrak{A} , Φ . μ_0 ist dessen isotroper Anteil, zu dem beim Vorhandensein eines magnetischen Feldes noch ein anisotroper Anteil $e/c (\mathfrak{A} \mathfrak{s})$ hinzukommt.

Bei Vernachlässigung der Massenvariabilität ergibt sich auf demselben Wege für den Brechungsindex

$$\mu = \sqrt{2m(E - e\Phi)} + \frac{e}{c} (\mathfrak{A} \mathfrak{s}) = \mu_0 + \frac{e}{c} (\mathfrak{A} \mathfrak{s}). \quad (8a)$$

Es soll von nun an unter μ_0 der relativistische oder der klassische isotrope Anteil des Brechungsindex verstanden werden.

Das rotationssymmetrische Feld legt es nun nahe, in dem Variationsproblem (6) zu Zylinderkoordinaten r , φ , x überzugehen, wobei die x -Achse in die Symmetrieachse des Feldes gelegt werde,

$$x = x, \quad y = r \cos \varphi, \quad z = r \sin \varphi. \quad (9a)$$

Von dem Vektorpotential \mathfrak{A} ist dann nur die Zirkularkomponente A_φ von Null verschieden¹⁾

$$A_r = A_x = 0, \quad A_\varphi = A(r, x). \quad (9)$$

In diesem Koordinatensystem erhält (6), wenn als Zeichen der Differentiation nach u wieder ein übergesetzter Punkt verwendet wird, die Gestalt

$$\delta \int \left(\mu_0 \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2} + \dot{x}^2 + \frac{e}{c} A r \dot{\varphi} \right) du = \delta \int J(r, x, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{x}) du = 0. \quad (10)$$

Die in diesem Variationsproblem zu φ gehörende Euler-Lagrangesche Differentialgleichung liefert das Impulsintegral

$$J_\varphi = \mu_0 \frac{r^2 \dot{\varphi}}{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2}} + \frac{e}{c} A r = \text{const.} \quad (11)$$

Es soll nun die meist verwirklichte Annahme gemacht werden, daß die Elektronenbahnen im feldfreien Raum in Meridianebenen verlaufen (daß

¹⁾ G 3, S. 648.

also die ganze Anordnung zylindersymmetrisch ist, die emittierende Kathode auf der Achse des Feldes liegt), somit im feldfreien Raum $\dot{\varphi} = 0$ gilt; wegen des Verschwindens von A ist dort auch $J_{\varphi} = 0$, und wegen der Konstanz von J_{φ} verschwindet es auch für den ganzen Verlauf. Mit $J_{\varphi} = 0$ errechnet man aus (11)

$$\dot{\varphi} = - \frac{e A \sqrt{\dot{r}^2 + \dot{x}^2}}{c r \sqrt{\mu_0^2 - \frac{e^2}{c^2} A^2}}. \quad (11a)$$

$\dot{\varphi}$ läßt sich so aus (10) eliminieren; die Bahnkurven werden dann von dem Variationsproblem

$$\delta \int \sqrt{\mu_0^2 - \frac{e^2}{c^2} A^2} \sqrt{\dot{r}^2 + \dot{x}^2} du = 0 \quad (12)$$

geliefert.

Wird schließlich noch statt des Parameters u wieder die Achsenkoordinate x eingeführt

$$u = u(x), \quad \frac{du}{dx} = u', \quad (13a)$$

so geht das die Meridianstrahlen liefernde Variationsproblem (12) über in

$$\delta \int \sqrt{\mu_0^2 - \frac{e^2}{c^2} A^2} \sqrt{1 + r'^2} dx = \delta \int I(x, r, r') dx = 0. \quad (13)$$

Die trotz des Verschwindens des Impulses um die x -Achse für Meridianstrahlen in einem anisotropen Medium auftretende Drehung der Meridianebene während des Verlaufs vom Objekt- zum Bildraum ergibt sich aus (11a) zu

$$\varphi = - \int_{s_0}^{s_1} \frac{e A \sqrt{1 + r'^2}}{c r \sqrt{\mu_0^2 - \frac{e^2}{c^2} A^2}} dx = - \int_{s_0}^{s_1} \varphi'(x, r, r') dx, \quad (14)$$

wenn die „Scheitelpunkte“ s_0 und s_1 die Achsenschnittpunkte zweier zu der Achse senkrechter Ebenen, der „Scheitelebenen“, sind, die den Feldbereich ganz in ihrem Innern einschließen.

2. Gaußscher Strahlengang.

Für das rotationssymmetrische Magnetfeld gilt, wenn man vom Eigenfeld der bewegten Elektronen absieht, die Entwicklung¹⁾

$$A(r, x) = \frac{r}{2} H(x) - \frac{r^3}{2^2 \cdot 4} H''(x) + \frac{r^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} H^{IV}(x) \dots, \quad (15)$$

¹⁾ G 3, S. 652ff. und B.

dabei ist $H(x)$ die längs der Symmetrieachse (x -Achse) vorgegebene x -Komponente der magnetischen Feldstärke.

Ebenso gilt für den Fall, daß die elektrische Raumladung $\varrho(r, x)$ symmetrisch um die x -Achse angeordnet ist und ϱ sich somit darstellen läßt als

$$\varrho(r, x) = \frac{1}{4\pi} (\varrho_0(x) + \varrho_2(x)r^2 + \varrho_4(x)r^4 + \dots) \quad (16)$$

für Φ eine Entwicklung¹⁾

$$\Phi(r, x) = V(x) - \frac{r^2}{2} V_1(x) + \frac{r^4}{4} V_2(x) \dots, \quad (17)$$

dabei ist $V(x)$ die längs der x -Achse vorgegebene Potentialfunktion und die Funktionen $V_1(x)$, $V_2(x)$, ... haben die Bedeutung

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{2} (V'' + \varrho_0), \\ V_2 &= V^{IV} + \varrho_0'' - 4\varrho_2 \end{aligned} \right\} \quad (17a)$$

$\varrho_0(x)$ ist, wie aus (16) ersichtlich, die Verteilung der Raumladung längs der Symmetrieachse.

Für den Ausdruck $\mu_0^2 - \frac{e^2}{c^2} A^2$ lautet die Entwicklung bis zu Gliedern vierter Ordnung

$$\mu_0^2 - \frac{e^2}{c^2} A^2 = \alpha_0 + \alpha_2 \frac{r^2}{2} - \alpha_4 \frac{r^4}{4} + \dots \quad (18)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{c^2} (E - eV) (E - eV + 2m_0 c^2), \\ \alpha_2 &= \frac{e}{c^2} (E - eV + m_0 c^2) (V'' + \varrho_0) - \frac{e^2}{2c^2} H^2, \\ \alpha_4 &= \frac{e}{2c^2} (E - eV + m_0 c^2) (V^{IV} + \varrho_0'' - 4\varrho_2) \\ &\quad - \frac{e^2}{4c^2} (V'' + \varrho_0)^2 - \frac{e^2}{4c^2} H H''. \end{aligned} \right\} \quad (18a)$$

Weiter ergibt sich für $\sqrt{\mu_0^2 - \frac{e^2}{c^2} A^2}$ die Entwicklung

$$\sqrt{\mu_0^2 - \frac{e^2}{c^2} A^2} = \beta_0 + \beta_2 \frac{r^2}{2} - \beta_4 \frac{r^4}{4} \dots \quad (19)$$

¹⁾ G 3, S. 652 ff. und B.

mit

$$\left. \begin{aligned} \beta_0 &= \frac{1}{c} \sqrt{(E - eV)(E - eV + 2m_0 c^2)}, \\ \beta_2 &= \frac{\alpha_2}{2\beta_0}, \\ \beta_4 &= \frac{\alpha_4 + 4\alpha_2 \beta_0^2}{8\beta_0^3}, \end{aligned} \right\} \quad (19a)$$

dabei ist $\beta_0(x)$ der isotrope Anteil des Brechungsindex längs der Achse.

Unter Verwendung der Entwicklung

$$\sqrt{1 + r'^2} = 1 + \frac{r'^2}{2} - \frac{r'^4}{8} + \dots \quad (20)$$

ergeben sich für die Integranden in (13) und (14) die Entwicklungen

$$I(x, r, r') = \beta_0 + \frac{1}{2}(\beta_0 r'^2 + \beta_2 r^2) - \frac{1}{8}\left(\frac{\beta_0}{2} r'^4 - \beta_2 r'^2 r^2 + \beta_4 r^4\right) \dots \quad (21)$$

und

$$\varphi'(x, r, r') = \gamma_0 + \frac{1}{2}(\gamma_0 r'^2 - \gamma_2 r^2) \dots \quad (22)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{e}{2c\beta_0} H, \\ \gamma_2 &= \frac{e}{8c\beta_0^3} (4\beta_2 H + \beta_0 H''). \end{aligned} \right\} \quad (22a)$$

Im Rahmen der Gaußschen Dioptrik, d. h. für achsennahe, flache Elektronenbahnen, genügt es, in der Entwicklung (21) nach dem Glied zweiter Ordnung in r, r' abzuberechnen; für den Gaußschen Strahlengang lautet somit das Variationsprinzip

$$\delta \int [\beta_0 + \frac{1}{2}(\beta_0 r'^2 + \beta_2 r^2)] dx = 0. \quad (23a)$$

Die Differentialgleichung der Bahnkurven ergibt sich als Euler-Lagrangesche Differentialgleichung von (23a) zu

$$\frac{d}{dx} \left[\beta_0(x) \frac{dr}{dx} \right] = \beta_2(x) r. \quad (23)$$

Für die Bilddrehung (14) sei

$$\psi_0 = - \int_{s_0}^{s_1} \gamma_0 dx = - \frac{e}{2c} \int_{s_0}^{s_1} \frac{H(x)}{\beta_0(x)} dx \quad (24)$$

als Gaußsche Bilddrehung definiert.

Der Nachweis, daß durch die Bahnkurven nach (23) eine geometrisch-optische Abbildung vermittelt wird, ist leicht durchgeführt¹⁾.

3. Das rein magnetische Feld.

Im folgenden soll nun noch der Gaußsche Strahlengang im rein magnetischen Felde betrachtet werden, d. h. in den die Gaußsche Abbildung charakterisierenden Gleichungen (23), (24) ist $\Phi \equiv 0$ zu setzen. Es ergibt sich so für $\beta_0, \beta_2, \gamma_0$

$$\left. \begin{aligned} \beta_0 &= \frac{1}{c} \sqrt{E(E + 2m_0 c^2)} = \mu_0, \\ \beta_2 &= -\frac{c^2}{4c^2 \mu_0} H^2(x), \\ \gamma_0 &= \frac{e}{2c \mu_0} H(x). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Die Differentialgleichung der Bahnkurven lautet somit

$$\frac{d^2 r}{dx^2} + l H^2(x) r = 0, \quad (26)$$

mit

$$l = \frac{e^2}{4c^2 \mu_0^2} \quad (27)$$

und die Gaußsche Bilddrehung ist gegeben durch

$$\psi_0 = -\frac{e}{2c \mu_0} \int_{x_0}^{x_1} H(x) dx. \quad (28)$$

Schließlich kann man noch in μ_0 für die Energie E bei Einführung der Röhrenspannung V_0 setzen:

$$E = e V_0 \quad (29)$$

und somit

$$\mu_0 = \frac{e}{c} \sqrt{V_0(V_0 + 2\eta c^2)}; \quad \eta = \frac{m_0}{e}; \quad (30)$$

$$l = \frac{1}{4 V_0 (V_0 + 2\eta c^2)}. \quad (31)$$

Beispiele:

a) *Der Kreisstrom.* Die x -Komponente $H(x)$ der magnetischen Feldstärke längs der Achse (x -Achse) eines Kreisstromes lautet bekanntlich

$$H(x) = \frac{2\pi i n \varrho^2}{c(\varrho^2 + x^2)^{3/2}}, \quad (32)$$

¹⁾ Siehe auch G 4.

(g = Radius des Stromkreises, i = Stromstärke, n = Anzahl der Windungen) wenn der Nullpunkt in den Mittelpunkt des Stromkreises verlegt wird. Nach Einführung von q als Längeneinheit erhält die Differentialgleichung für den Gaußschen Strahlengang die Form

$$\frac{d^2 r}{d x^2} + a \frac{r}{(1 + x^2)^3} = 0, \quad (33)$$

dabei hat a (die Größen i , V_0 im absoluten Maßsystem gemessen) nach (31), (32) die Bedeutung

$$a = \frac{\pi^2 n^2 i^2}{V_0 (V_0 + 2 \eta c^2) c^2} \quad (34)$$

oder umgerechnet ins praktische Maßsystem (i in Ampere, V_0 in Volt)

$$a = \frac{900 \pi^2 n^2 i^2}{V_0 (V_0 + 1018 \cdot 10^3)} \quad (35)$$

a wird bei allen praktischen Anwendungen eines Kreisstromes bestimmt kleiner als Eins sein¹⁾. Zur Auflösung der Differentialgleichung (33) verwendet man zweckmäßig die beiden Ansätze

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(1 + x^2)^n}, & r_2 &= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(1 + x^2)^n}, \\ r_1' &= x \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n}{(1 + x^2)^n}, & r_2' &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{d_n}{(1 + x^2)^n} \\ c_n &= -2(n-1)a_{n-1}, & d_n &= \frac{a}{2n} b_{n-2}. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

die zusammen ein Fundamentalsystem ergeben, so daß sich eine beliebige Lösung darstellen läßt als eine Linearkombination

$$r(x) = c_1 \cdot r_1(x) + c_2 \cdot r_2(x) \quad (37)$$

der beiden partikulären Integrale r_1 und r_2 .

Durch Einsetzen der Ansätze in (33) und Koeffizientenvergleich ergeben sich für die Koeffizienten der Potenzreihen, wenn $a_0 = 1$, $b_0 = 1$ gesetzt wird, die Rekursionsformeln

$$a_n = 2 \frac{n-1}{2n+1} a_{n-1} - \frac{a}{2n(2n+1)} a_{n-2}, \quad (38)$$

$$b_n = 2 \frac{n-1}{2n-1} b_{n-1} - \frac{a}{2n(2n-1)} b_{n-2}. \quad (39)$$

¹⁾ M. Knoll u. E. Ruska geben als verwendete Röhrenspannung an: 1500 bis 75000 Volt; ZS. f. Phys. **78**, 318, 1932.

Für einen festen Wert von x sind die partikulären Lösungen (36) Potenzreihen in a , die für $|x| \geq 1$ (x in q als Einheit gemessen) gut konvergieren. Der Konvergenzbeweis für $|x| > 0$ ist leicht erbracht.

Das Feld des Kreisstromes sei zunächst eingeschlossen zwischen zwei zur Kreisstromebene symmetrischen, parallelen Scheitelebenen S_0, S_1 , d. h. innerhalb der beiden Ebenen soll die durch (32) gegebene Feldstärke herrschen, außen hingegen soll sie beständig Null sein. Die Elektronenbahnen werden dann im Außenraum (Objekt- und Bildraum) geradlinig verlaufen, innerhalb der Scheitelebenen jedoch nach Differentialgleichung (33), und ihre Meridianebenen werden beim Durchlaufen des Feldraumes die durch (28) gegebene Bilddrehung erfahren.

Die beiden partikulären Lösungen r_1, r_2 , (36) haben nun folgende Eigenschaften:

Da r_1 eine gerade Funktion ist, stellt es einen Strahl dar, dessen geradlinige Teile im Objekt- und im Bildraum symmetrisch zur Kreisstromebene

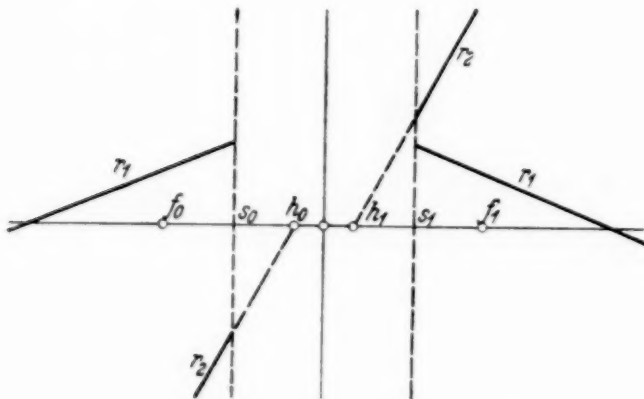


Fig. 1. Lage der Haupt- und Brennpunkte in der Gaußschen Dioptrik.

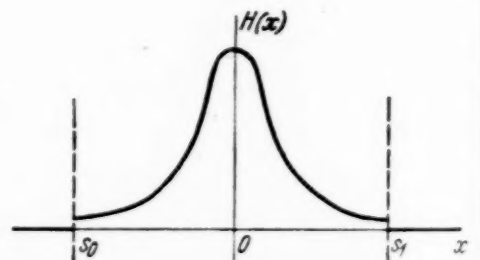


Fig. 2. Feldverlauf beim Kreisstrom mit Scheitelebenen bei +3 und -3.

liegen. Dieser Strahl wird im Objektraum festgelegt durch $r_1(s_0), r_1'(s_0)$ und im Bildraum durch $r_1(s_1), r_1'(s_1)$. r_2 hingegen ist eine ungerade Funktion, sie stellt den Strahl dar, dessen geradlinige Teile im Objekt- und Bildraum zueinander parallel sind. Dieser Strahl wird im Objektraum festgelegt durch $r_2(s_0), r_2'(s_0)$ und im Bildraum durch $r_2(s_1), r_2'(s_1)$.

Im Rahmen der Gaußschen Dioptrik ergibt nun der Strahl r_2 in seinen Achsenschnittpunkten die Hauptpunkte des optischen Systems, und die Entfernung der Achsenschnittpunkte des Strahles r_1 von dem entsprechenden Hauptpunkt liefert die doppelte Brennweite (Fig. 1). (Wegen der Symmetrie der Lösungen ist $f_0 = f_1$). Durch diese beiden Angaben sind die optischen Eigenschaften des Systems vollständig charakterisiert.

Zunächst möge eine Abbildung durch das zwischen den Scheitelebenen $s_0 = -3$, $s_1 = +3$ eingeschlossene Feld versucht werden, d. h. außerhalb dieser beiden Scheitelebenen soll das Feld beständig Null sein, in den Scheitelebenen soll es unstetig auf den durch (32) gegebenen Wert springen, um innerhalb der Scheitelebenen beständig nach (32) zu verlaufen (Fig. 2). Für die Reihen (36) ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} r_1(-3) &= 1 - 10^{-3} \cdot 0,531 a + 10^{-7} \cdot 0,778 a^2 - 10^{-11} \cdot 0,52 a^3 + \dots \\ r_1'(-3) &= 0 - 10^{-3} \cdot 0,656 a + 10^{-6} \cdot 0,193 a^2 - 10^{-10} \cdot 0,193 a^3 + \dots \\ r_2(-3) &= -3 + 10^{-2} \cdot 0,272 a - 10^{-6} \cdot 0,516 a^2 + 10^{-10} \cdot 0,544 a^3 - \dots \\ r_2'(-3) &= 1 + 10^{-2} \cdot 0,250 a - 10^{-5} \cdot 0,111 a^2 + 10^{-9} \cdot 0,140 a^3 - \dots \end{aligned} \right\} (40)$$

Berechnet man die optischen Konstanten auf die angegebene Art, so ergibt sich

$$h_0 = -h_1 = -10^{-1} \cdot 0,102 a + 10^{-4} \cdot 0,294 a^2 \dots \quad (41)$$

$$f_0 = f_1 = -\frac{1}{a} \cdot 10^3 \cdot 0,77 + 1,67 \dots \quad (42)$$

Für die Haupt- und Brennpunkte ergibt sich also die durch Fig. 3 gekennzeichnete Lage; es kann also eine reelle optische Abbildung in diesem Falle nicht zustande kommen.

Rückt man die Scheitelpunkte in die Punkte -1 und $+1$, so daß jetzt nur noch in dem kürzeren Bereich eine von Null verschiedene Feldstärke herrscht, so ergibt sich für die optischen Konstanten

$$h_0 = -h_1 = -10^{-1} \cdot 0,977 a + 10^{-2} \cdot 0,73 a^2 \dots \quad (43)$$

$$f = -\frac{1}{a} \cdot 10^2 \cdot 0,12 + 0,60 \dots \quad (44)$$

Werden also die Scheitelebenen näher aneinander gerückt, so wandern die Brennpunkte näher an die ihnen entsprechenden Räume heran. Für $s_0 = -1$, $s_1 = +1$ ist jedoch in der Lage der Brennpunkte noch keine qualitative Änderung gegenüber dem vorher besprochenen Falle erreicht.

Es hätte nun nicht viel Sinn, die Scheitelebenen noch näher aneinander rücken zu lassen. Ein solcher Fall ließe sich praktisch wohl auch nicht annähernd verwirklichen, weil durch Anbringung von Polschuhen in so ge-

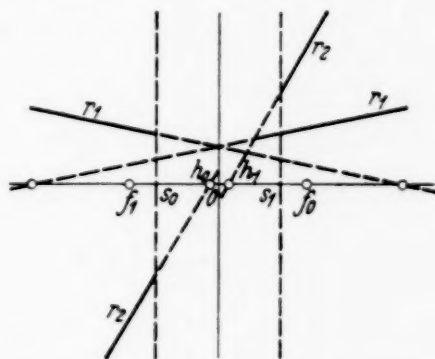


Fig. 3. Lage der Haupt- und Brennpunkte beim Kreisstrom.

ringen Entfernungen auch der Feldverlauf im Innern wesentlich modifiziert würde und auch nicht angenähert (32) entspräche.

Dieses negative Ergebnis ist deshalb von Bedeutung, weil es zeigt, daß die bisherige Annahme, man könne beliebige, dünne magnetische Linsen für die Rechnung durch das Feld eines Kreisstromes ersetzen, unhaltbar ist. Denn entweder konzentriert man das Feld auf einen sehr engen Bereich, dann hat man nicht die optischen Eigenschaften des Kreisstromes, oder das Feld ist das eines Kreisstromes, dann bedeutet die Annahme eines kurzen Feldverlaufs eine Ungenauigkeit, die selbst die qualitativen Eigenschaften des Feldes nicht erkennen läßt.

Erfolgversprechender scheint die Aufgabe zu sein, Felder endlicher Länge mit konstanter Feldstärke und die Aneinanderreihung mehrerer solcher Felder zu untersuchen, da sich hierdurch die Möglichkeit ergibt, experimentell ausgemessene Felder mit beliebigem Feldstärkeverlauf durch „Treppen“ zu approximieren, eine Aufgabe, die rechnerisch leicht durchführbar ist.

b) Das konstante Feld. Das Feld habe im Bereich (s_0, s_1) die konstante Feldstärke H_x , während es außerhalb dieses Bereichs beständig Null sei. Es werde ferner der Ausdruck

$$\frac{e H_x}{2 e \mu_0} = k \quad (45)$$

gesetzt. Dann lautet die Differentialgleichung für die Bahnkurven innerhalb des Feldbereichs:

$$\frac{d^2 r}{d x^2} + k^2 r = 0. \quad (46)$$

Die allgemeine Lösung (d. h. das Fundamentalsystem) und der erste Differentialquotient, genommen an den beiden Scheitelebenen lauten dann:

$$\left. \begin{aligned} r(s_0) &= c_1 \sin(k s_0) + c_2 \cos(k s_0), & r(s_1) &= c_1 \sin(k s_1) + c_2 \cos(k s_1), \\ r'(s_0) &= k c_1 \cos(k s_0) - k c_2 \sin(k s_0), & r'(s_1) &= k c_1 \cos(k s_1) - k c_2 \sin(k s_1). \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Sie sind also, wenn man c_1 und c_2 eliminiert, durch die Beziehung verknüpft:

$$\left. \begin{aligned} r(s_1) &= \cos[k(s_1 - s_0)] \cdot r(s_0) + \frac{1}{k} \sin[k(s_1 - s_0)] \cdot r'(s_0), \\ r'(s_1) &= -k \sin[k(s_1 - s_0)] \cdot r(s_0) + \cos[k(s_1 - s_0)] \cdot r'(s_0). \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Im folgenden werde $s_1 - s_0 = l$ gesetzt. Durch die Gleichungen (48) ist jeder geraden Bahnkurve im Objektraum eine gerade Bahnkurve im Bildraum eindeutig zugeordnet, man kann also auch den Schnittpunkt des

Bildstrahls mit der x -Achse ξ_1 in Abhängigkeit von dem Schnittpunkt des Objektstrahls mit der x -Achse ξ_0 berechnen:

$$\xi_1 = \frac{\xi_0 \left\{ s_1 + \frac{1}{k} \operatorname{ctg}(kl) \right\} + (s_1 - s_0) \frac{1}{k} \operatorname{ctg}(kl) - s_0 s_1 - \frac{1}{k^2}}{\xi_0 - s_0 + \frac{1}{k} \operatorname{ctg}(kl)}. \quad (49)$$

In der Form der Linsengleichung geschrieben:

$$\frac{1}{s_0 + \frac{1 - \cos(kl)}{k \sin(kl)} - \xi_0} + \frac{1}{\xi_1 - s_1 + \frac{1 - \cos(kl)}{k \sin(kl)}} = k \sin(kl). \quad (50)$$

Die optischen Konstanten Brennweite f und Abszissen der Hauptebenen h_0 , h_1 sind also:

$$\left. \begin{aligned} f &= \frac{1}{k \sin(kl)}, & h_0 &= s_0 + \frac{1 - \cos(kl)}{k \sin(kl)}, \\ h_1 &= s_1 - \frac{1 - \cos(kl)}{k \sin(kl)}. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Es ist nun von Interesse, diese Beziehungen etwas ausführlicher zu diskutieren; denn so, wie man das elektrische Feld durch eine Aufeinanderfolge von dünnen Schichten mit konstantem, aber von Schicht zu Schicht verschiedenem Brechungsindex ersetzen bzw. approximieren kann, genau so läßt sich eine magnetische Linse in eine Folge einzelner Elementarlinsen zerlegen, die durch dünne Scheiben konstanter magnetischer Feldstärke realisiert sind. Deshalb kann man sich die Wirkungsweise magnetischer Linsen am bequemsten an dem rechnerisch einfachsten Fall einer Linse mit konstanter Feldstärke klarmachen.

Aus (51) geht hervor, daß die Brechkraft $1/f$ der Linse zunächst mit ihrer Länge wächst, dann aber wieder kleiner wird und sogar negative Werte annehmen kann. Das letztere ist der Fall, wenn der Ausdruck kl zwischen π und 2π liegt. Aber auch bei kürzeren Feldern, wenn etwa kl zwischen $\pi/2$ und π liegt, kann eine Abbildung im feldfreien Bildraum unmöglich werden, wenn nämlich der Bildpunkt noch im Feldbereich liegt. Diese Verhältnisse verdeutlichen die Fig. 4 und 5. Da diese Überlegungen sinngemäß auch für einen anderen Feldverlauf gelten, ist es erstrebenswert, eine möglichst große Feldstärke in einem möglichst kurzen Bereich zu konzentrieren.

c) *Aneinandersetzung mehrerer konstanter Felder.* Die durch die Gleichungen (48) gegebene linear-homogene Transformation der Größen $r(s_0)$

und $r'(s_0)$ in $r(s_1)$ und $r'(s_1)$ läßt sich durch eine Matrix darstellen, und zwar bedeutet in unserem Falle die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (52a)$$

eine abgekürzte Schreibweise für das linear-homogene Gleichungssystem:

$$\begin{cases} r(s_1) = a_{11} r(s_0) + a_{12} r'(s_0), \\ r'(s_1) = a_{21} r(s_0) + a_{22} r'(s_0). \end{cases} \quad (52)$$

Für die Linse mit konstanter Feldstärke lautet die Matrix also nach (48)

$$A = \begin{pmatrix} \cos(kl) & +\frac{1}{k} \sin(kl) \\ -k \sin(kl) & \cos(kl) \end{pmatrix}. \quad (53)$$

Läßt man nun die Elektronen nacheinander zwei Felder mit konstanter, aber verschiedener Feldstärke durchlaufen, die so angeordnet sind, daß die

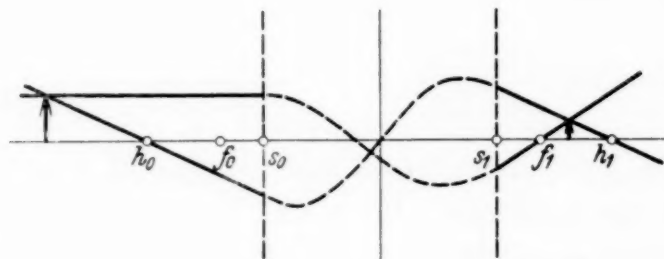


Fig. 4. Optische Abbildung bei konstanter Feldstärke und negativer Brechkraft: $kl > \pi$.

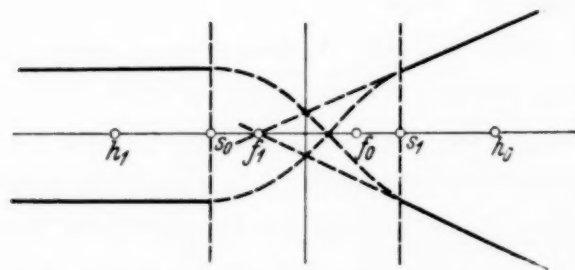


Fig. 5. Optische Abbildung bei konstanter Feldstärke: $\pi/2 < kl < \pi$.

vordere Scheitelebene des zweiten Feldes mit der hinteren des ersten zusammenfällt, so bedeutet das, daß die Größen $r(s_1)$ und $r'(s_1)$, die durch Transformation aus den Größen $r(s_0)$, $r'(s_0)$ hervorgegangen sind, ihrerseits durch eine weitere Transformation in die Größen $r(s_2)$, $r'(s_2)$ übergeführt werden. Die zwei- oder mehrmalige Ausführung solcher linear-homogener Transformationen hintereinander läuft nun auf die Multiplikation der

entsprechenden Matrizen hinaus. Die Matrix M eines Systems aus n Stufen konstanter Feldstärke wird also erhalten durch die Multiplikation:

$$M = A_n A_{n-1} A_{n-2} A_{n-3} \dots A_3 A_2 A_1. \quad (54)$$

Dabei ist das Produkt zweier Matrizen bekanntlich definiert durch die Gleichung

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} & a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} \end{pmatrix}. \quad (55)$$

Hat man aber einmal die Glieder von M ausgerechnet, die mit m_{11} , m_{12} , m_{21} , m_{22} bezeichnet werden mögen, so lassen sich wieder auf dieselbe Weise wie vorher die optischen Konstanten ausrechnen. Es wird dabei zunächst angenommen, daß über die Beziehungen zwischen Brennweite rechts und Brennweite links nichts bekannt ist. Dann ergibt die Rechnung für die optischen Konstanten:

$$\left. \begin{aligned} f_0 &= -\frac{m_{11} m_{22} - m_{12} m_{21}}{m_{21}}, & f_1 &= -\frac{1}{m_{21}}, \\ h_0 &= s_0 - \frac{m_{11} m_{22} - m_{12} m_{21} - m_{22}}{m_{21}}, & h_1 &= s_1 + \frac{1 - m_{11}}{m_{21}}. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Die hier auftretende Matrizendeterminante ist aber gleich 1. Denn es gilt allgemein, daß die Determinante eines Matrizenprodukts gleich dem Produkt der Determinanten der Einzelmatrizen ist. Da die Matrix jeder einzelnen Stufe die Form (53) hat, ist die Determinante jeder Einzelmatrix 1, also auch die Determinante des Produkts. Daraus folgt, daß die Brennweite links und rechts gleich sein muß, und man erhält die optischen Konstanten in der einfacheren Form:

$$f = -\frac{1}{m_{21}}, \quad h_0 = s_0 - \frac{1 - m_{22}}{m_{21}}, \quad h_1 = s_1 + \frac{1 - m_{11}}{m_{21}}. \quad (57)$$

Diese Form kann aber für jede magnetische Linse in Ansatz gebracht werden, da sich jeder Feldverlauf mit beliebiger Genauigkeit durch einen stufenförmigen Verlauf approximieren läßt. Es ist also allgemein bei einer magnetischen Linse die Brennweite links gleich derjenigen rechts.

Für die Lateralvergrößerung ergibt sich nach dem zweiten Linsengesetz:

$$\frac{\eta_1}{\eta_0} = \frac{\xi_1 - h_1}{\xi_0 - h_0}. \quad (58)$$

Führt man die Multiplikation der Matrizen für ein dreiteiliges, symmetrisches Feld durch, wobei die auf den Mittelteil bezüglichen Größen mit dem Index 2, die auf einen Außenteil bezüglichen mit dem Index 1, ferner die Länge einer Stufe wieder mit l_v bezeichnet werden möge, so ergibt sich für die optischen Konstanten:

$$\left. \begin{aligned} f &= \frac{1}{k_1 \left\{ \cos(k_2 l_2) \sin(2k_1 l_1) + \sin(k_2 l_2) \left[\frac{k_2}{k_1} \cos^2(k_1 l_1) - \frac{k_1}{k_2} \sin^2(k_1 l_1) \right] \right\}}, \\ h_0 &= s_0 + f \left[1 - \cos(k_2 l_2) \cos(2k_1 l_1) + \frac{1}{2} \left(\frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1} \right) \sin(k_2 l_2) \sin(2k_1 l_1) \right], \\ h_1 &= s_1 - f \left[1 - \cos(k_2 l_2) \cos(2k_1 l_1) + \frac{1}{2} \left(\frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1} \right) \sin(k_2 l_2) \sin(2k_1 l_1) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Dieser Ausdruck erscheint bereits so kompliziert, daß die Erweiterung auf Felder mit beliebig vielen Teilen nur dann möglich erscheint, falls man spezielle Voraussetzungen über die Länge der einzelnen Teile des Feldes macht. Es ergibt sich nun eine bedeutende Vereinfachung, wenn man bei der Approximation eines empirisch ausgemessenen Feldes die einzelnen Stufen so wählt, daß das Produkt aus Feldstärke und Länge einer Stufe für jede Stufe denselben Wert hat, also auch das Produkt $k_v l_v = \alpha$ eine Konstante ist. Diese Forderung ist keine Einschränkung der allgemeinen Verwendbarkeit der so erhaltenen Beziehungen, denn es läßt sich bei genügend kleiner Wahl von α auch so jede einzelne Stufe beliebig schmal wählen. Die Matrix (53) nimmt dann die Form an:

$$A_v = \begin{pmatrix} \cos \alpha & + \frac{1}{k_v} \sin \alpha \\ -k_v \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad (60)$$

und die nach (54) definierte Matrix M_n nimmt, wie sich leicht durch vollständige Induktion nachweisen läßt, die Form an:

$$\left. \begin{aligned} m_{11} &= \cos^n \alpha - \sum_2^n \sum_1^{v-1} \frac{k_\mu}{k_v} \cos^{n-2} \alpha \sin^2 \alpha \\ &\quad + \sum_4^n \sum_3^{\tau-1} \sum_2^{\sigma-1} \sum_1^{v-1} \frac{k_\sigma k_\mu}{k_\tau k_v} \cos^{n-4} \alpha \sin^4 \alpha - \dots, \\ m_{12} &= + \sum_1^n \frac{1}{k_\mu} \cos^{n-1} \alpha \sin \alpha \\ &\quad - \sum_3^n \sum_2^{\sigma-1} \sum_1^{v-1} \frac{k_v}{k_\sigma k_\mu} \cos^{n-3} \alpha \sin^3 \alpha + \dots, \\ m_{21} &= - \sum_1^n k_\mu \cos^{n-1} \alpha \sin \alpha \\ &\quad + \sum_3^n \sum_2^{\sigma-1} \sum_1^{v-1} \frac{k_\sigma k_\mu}{k_v} \cos^{n-3} \alpha \sin^3 \alpha - \dots, \\ m_{22} &= \cos^n \alpha - \sum_2^n \sum_1^{v-1} \frac{k_v}{k_\mu} \cos^{n-2} \alpha \sin^2 \alpha \\ &\quad + \sum_4^n \sum_3^{\tau-1} \sum_2^{\sigma-1} \sum_1^{v-1} \frac{k_\tau k_v}{k_\sigma k_\mu} \cos^{n-4} \alpha \sin^4 \alpha - \dots \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Geht man zu stetigen Feldverläufen über, wird also $\cos \alpha = 1$, $\sin \alpha = \alpha = k dx$, so gehen die Summen in Integrale über:

$$\left. \begin{aligned} m_{11} &= 1 - \int_{s_0}^{s_1} \int_{s_0}^{x_2} k^2(x_1) dx_1 dx_2 + \int_{s_0}^{s_1} \int_{s_0}^{x_4} \int_{s_0}^{x_3} \int_{s_0}^{x_2} k^2(x_1) k^2(x_3) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 - \dots, \\ m_{12} &= (s_1 - s_0) - \int_{s_0}^{s_1} \int_{s_0}^{x_3} \int_{s_0}^{x_2} k^2(x_2) dx_1 dx_2 dx_3 \\ &\quad + \int_{s_0}^{s_1} \int_{s_0}^{x_5} \int_{s_0}^{x_4} \int_{s_0}^{x_3} \int_{s_0}^{x_2} k^2(x_2) k^2(x_4) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dx_5 - \dots, \\ m_{21} &= - \int_{s_0}^{s_1} k^2(x_1) dx_1 + \int_{s_0}^{s_1} \int_{s_0}^{x_3} \int_{s_0}^{x_2} k^2(x_1) k^2(x_3) dx_1 dx_2 dx_3 - \dots, \\ m_{22} &= 1 - \int_{s_0}^{s_1} \int_{s_0}^{x_2} k^2(x_2) dx_1 dx_2 + \int_{s_0}^{s_1} \int_{s_0}^{x_4} \int_{s_0}^{x_3} \int_{s_0}^{x_2} k^2(x_2) k^2(x_4) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 - \dots \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Durch Einsetzen in (57) erhält man die bereits von W. Glaser¹⁾ auf anderem Wege gefundene Formel für die Brechkraft einer magnetischen Linse. Die Integralreihen konvergieren, wie sich durch Majorisierung von k durch eine feste obere Schranke leicht zeigen läßt²⁾, besser als trigonometrische Reihen, und zwar um so besser, je kürzer das Feld ist. Berücksichtigt man bei kurzen Feldern nur das erste bzw. die ersten zwei Integralausdrücke jedes Matrizengliedes, so ergeben sich die beiden für kurze Linsen angenähert richtigen Beziehungen:

$$f \sim \frac{1}{\int_{s_0}^{s_1} k^2(x) dx}, \quad (63)$$

$$h_1 \sim h_2 \sim \frac{\int_{s_0}^{s_1} x k^2(x) dx}{\int_{s_0}^{s_1} k^2(x) dx}. \quad (64)$$

D. h.: Die Brennweite einer kurzen Linse ist in erster Näherung gleich der Brennweite der Linse mit konstanter Feldstärke, die dieselbe Länge hat

¹⁾ G 1, S. 577. — ²⁾ G 1, S. 576.

und bei der der Ausdruck $k^2 \cdot l$ gleich dem Integral $\int_{s_0}^{s_1} k^2 dx$ der betrachteten Linse ist. Ferner fallen die Hauptebenen in erster Näherung zusammen, und zwar mit einer Ebene, die man als eine Art „Schwerpunktsebene der Funktion k^2 “ bezeichnen könnte. Bei symmetrischem Feldverlauf ist das die Symmetrieebene.

Es muß aber gesagt werden, daß die Bedeutung der Formeln (61) für die numerische Rechnung ebenso wie die der Integraldarstellung nicht allzu groß sein dürfte, weil sich die mehrfachen Integrale eigentlich nur für ganze, rationale Funktionen ohne Schwierigkeiten geschlossen auswerten lassen. Dagegen dürfte es weniger schwierig sein, bei einem *ausgemessenen* Verlauf der Feldstärke direkt die Formeln (54) in Verbindung mit (57) anzuwenden. Es sei daher im folgenden nur ein sehr einfacher Feldverlauf zur Illustrierung durchgerechnet, nämlich ein Trapez.

d) *Trapezförmiger Feldverlauf.* Das Feld habe die in Fig. 6 angedeutete Form. Zur Berechnung wird es zweckmäßig in drei Teile zerlegt, die Länge

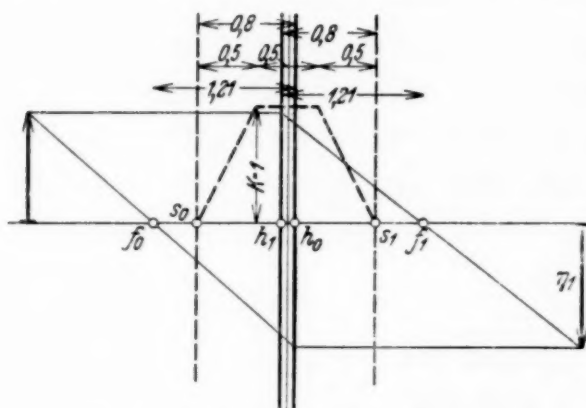


Fig. 6. Optische Abbildung bei trapezförmigem Verlauf der Feldstärke.

des ersten sei l_1 , die des zweiten l_2 , die des dritten l_3 , die Höhe des mittleren Teiles sei h . Für den linearen Anstieg werde zur Berechnung der Matrix die Entwicklung (62) verwendet, für den mittleren Teil (53), die Matrix des dritten erhält man durch folgende Überlegung: Es werde eine Linse mit bekannter Matrix A gerade umgekehrt, indem der

ganze Feldverlauf an irgendeiner zur Achse senkrechten Ebene gespiegelt wird. Dann folgt aus der Tatsache, daß die Differentialgleichung (46) nur Ableitungen gerader Ordnung enthält, daß man die Bahnkurven in dem neuen System durch Spiegelung an derselben Ebene erhält. In den Gleichungen (52) sind also nur s_0 mit s_1 zu vertauschen, ferner bei den ersten Ableitungen die Vorzeichen umzukehren, und um die Matrix \bar{A} zu erhalten, sind die so gewonnenen Gleichungen nach $r(s_1)$ und $r'(s_1)$ zu entwickeln. Es ergibt sich dann, daß sich die Matrix \bar{A} von der alten Matrix A nur dadurch unterscheidet, daß die Glieder a_{11} und a_{22} miteinander vertauscht sind.

Es genügt also die Berechnung der Matrix für linearen Anstieg, um auch gleichzeitig die Formel für den linearen Abfall zu erhalten. Für die drei Matrizen ergeben sich dann folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
 &= \left(\begin{array}{cc} \sum_0^{\infty} (-1)^v \prod_{\varrho=1}^v \frac{1}{3\varrho(3\varrho-1)} h^v l_1^{2v} & \sum_0^{\infty} (-1)^v \prod_{\varrho=1}^v \frac{1}{3\varrho(3\varrho+1)} h^v l_1^{2v+1} \\ \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} (-1)^v \prod_{\varrho=2}^v \frac{1}{(3\varrho-1)(3\varrho-3)} h^v l_1^{2v-1} & \sum_0^{\infty} (-1)^v \prod_{\varrho=1}^v \frac{1}{3\varrho(3\varrho-2)} h^v l_1^{2v} \end{array} \right) \\
 &= \left(\begin{array}{cc} \cos(\sqrt{h} l_2) & + \frac{1}{\sqrt{h}} \sin(\sqrt{h} l_2) \\ -\sqrt{h} \sin(\sqrt{h} l_2) & \cos(\sqrt{h} l_2) \end{array} \right) \\
 &= \left(\begin{array}{cc} \sum_0^{\infty} (-1)^v \prod_{\varrho=1}^v \frac{1}{3\varrho(3\varrho-2)} h^v l_3^{2v} & \sum_0^{\infty} (-1)^v \prod_{\varrho=1}^v \frac{1}{3\varrho(3\varrho+1)} h^v l_3^{2v+1} \\ \frac{1}{2} \sum_0^{\infty} (-1)^v \prod_{\varrho=2}^v \frac{1}{(3\varrho-1)(3\varrho-3)} h^v l_3^{2v-1} & \sum_0^{\infty} (-1)^v \prod_{\varrho=1}^v \frac{1}{3\varrho(3\varrho-1)} h^v l_3^{2v} \end{array} \right)
 \end{aligned} \quad (65)$$

Die Multiplikation dieser drei Matrizen möge nun unter der Spezialisierung durchgeführt werden, daß l_1, l_2, l_3 alle gleich $1/2$, $h = 1$ ist. D. h. bei einer Röhrenspannung von 10000 Volt, daß die maximale Feldstärke 673,2 Gauß beträgt. Dann ergeben sich als numerische Werte für die drei Matrizen:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{pmatrix} 0,9587 & 0,4896 \\ -0,2458 & 0,9175 \end{pmatrix} & A_2 &= \begin{pmatrix} 0,8776 & 0,4794 \\ -0,4794 & 0,8776 \end{pmatrix} \\
 A_3 &= \begin{pmatrix} 0,9175 & 0,4896 \\ -0,2458 & 0,9587 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \quad (66)$$

Durch Multiplikation der drei Matrizen erhält man $M = A_3 A_2 A_1$

$$M = \begin{pmatrix} 0,3324 & 1,0631 \\ -0,8248 & 0,3324 \end{pmatrix}. \quad (67)$$

Daraus ergeben sich die optischen Konstanten zu

$$f = 1,2125 \text{ cm}, \quad h_0 = s_0 + 0,8095 \text{ cm}, \quad h_1 = s_0 + 0,6905 \text{ cm}, \quad (68)$$

und die Gaußsche Bilddrehung, die bei Einführung von k die Form hat:

$$\psi = - \int_{s_0}^{s_1} k(x) dx \quad (69)$$

ergibt sich zu -1 oder in Graden zu $-57^\circ 18'$.

Prag, Institut für theoretische Physik der Deutschen Universität.

Über die Aggregation von Aerosolen mittels Schallwellen.

Von **O. Brandt** und **H. Freund** in Köln.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 15. Februar 1935.)

Es wird an Hand von mikrokinematographischen Aufnahmen das Verhalten eines Aerosols während der Einwirkung intensiver kurzer Schallwellen beschrieben. Durch Fallgeschwindigkeitsmessungen wird die Teilchenvergrößerung in Abhängigkeit von der Schallamplitude größenordnungsmäßig bestimmt. Weiterhin werden Konzentrationsbestimmungen des Aerosols vor und nach der Schalleinwirkung mitgeteilt.

Die Koagulation von Aerosolen unter der Einwirkung intensiver Schallwellen innerhalb eines günstigen Frequenzbereiches führt, wie wir gezeigt haben¹⁾, innerhalb eines Zeitraumes von wenigen Sekunden zu einer hochprozentigen Ausfällung der Schwebeteilchen. Man hat schon früher gelegentlich versucht, durch starke Lufterschütterung das Absinken von Schwebepartikeln aus Gasen zu beschleunigen. Die Ergebnisse entsprachen jedoch nicht den Erwartungen; zudem waren die Versuche so undefiniert, daß die physikalischen Vorgänge dabei nicht eindeutig zu übersehen waren. Es läßt sich daher über einen Zusammenhang mit dem von uns beschriebenen Effekt vorerst nichts aussagen. Auch liegt der von uns als günstig erkannte Frequenzbereich von etwa 6,5 bis 25 kHz weit oberhalb der anderweitig benutzten Bereiche. Bei neueren Versuchen erhielten wir auch bis weit ins Ultraschallgebiet²⁾ eine deutlich koagulierende Wirkung der Schallenergie.

Um den Vorgang der Ausfällung der Aerosole näher zu untersuchen, wurden mikrophotographische und mikrokinematographische Aufnahmen des Aerosols vor, während und nach der Beschallung gemacht. Vor allem war die Frage zu entscheiden, ob als Ursache der Ausfällung eine Zentrifugierung der Teilchen an die Rohrwände infolge der in Schallrohren auftretenden Wirbel und Zirkulationen zu gelten hätte, oder ob es sich um eine echte Aggregation der Partikel im Gasraum selbst etwa durch kinetische Zusammenstöße handelte. Die direkten mikroskopischen Beobachtungen (es gelang, auch das Aerosol während des Vorganges zu projizieren) wie auch die photographischen Aufnahmen entschieden diese Frage eindeutig zugunsten der Aggregation.

¹⁾ O. Brandt u. H. Freund, ZS. f. Phys. **92**, 385, 1934. — ²⁾ Bei der Ausdehnung der Versuche ins Ultraschallgebiet hat Herr Privatdozent Dr. Hiedemann uns freundlichst beraten. Hierfür und für viele wertvolle Diskussionen zur vorliegenden Arbeit möchten wir ihm auch an dieser Stelle danken.

Die elektro-akustische Anordnung ist dieselbe, wie sie schon für die früher mitgeteilten Versuche Verwendung fand¹⁾. Als Schallgeber dient ein Magnetostruktionsstab mit kolbenförmigen Endstücken, der von der Schwingspule des Röhrensenders angeregt wird. Die Schwingungsamplitude ist regulierbar durch den Kondensator des Schwingkreises. Die Messung der Schwingungsamplitude geschieht mikroskopisch am Ende des Stabes. Der Schwingstab steht senkrecht und ragt mit dem Kopfende in ein ebenfalls senkrecht angebrachtes Schallrohr. Dieses besteht aus dem Mittelstück *A* und den Endstücken *B* und *C* (Fig. 1). Das Mittelstück ist ein Vierkantglasrohr ($13 \times 13 \text{ mm}^2$). Die Endstücke sind Vierkantmessingrohre von gleichem Querschnitt. Im oberen Endstück befindet sich ein dicht schließender Schieber *S*. Im unteren Stück sind die Beobachtungskammern *K*₁ und *K*₂ angebracht. Die Wände der Kammer *K*₂ bestehen aus zwei Deckgläschen, deren gegenseitiger Abstand 0,7 mm beträgt. Diese Kammer wurde zu den mikrophotographischen Aufnahmen benutzt. Für die Dunkelfeldbeleuchtung diente eine für den speziellen Zweck günstige Anordnung. Die Zentralblende *b* wurde durch einen Mikroskopkondensor *M* günstiger Brennweite auf der Vorderlinse des Beobachtungsobjektivs *O* abgebildet, so daß kein direktes Licht einfallen konnte. Die mikrophotographischen Aufnahmen wurden mit einem kleinen Kinoapparat gemacht.

Zu Fallzeitmessungen diente die Kammer *K*₁. Die im Kanal *a* fallenden Teilchen wurden senkrecht zur Blickrichtung nach bekannter Methode beleuchtet. Zur Bestimmung der Fallgeschwindigkeit wurde die Zeit gemessen, in der die Teilchen zwei im Okular des Mikroskops angebrachte Marken passieren.

Für die im folgenden beschriebenen mikrophotographischen Untersuchungen und die anschließend mitgeteilten Messungen der Teilchenvergrößerung aus den Fallgeschwindigkeiten ist die stoffliche Natur des benutzten Aerosols belanglos. Da nur die spezifische Kolloidnatur, vor allem der Dispersitätsgrad, für das allgemeine Verhalten im Schallfeld maßgebend

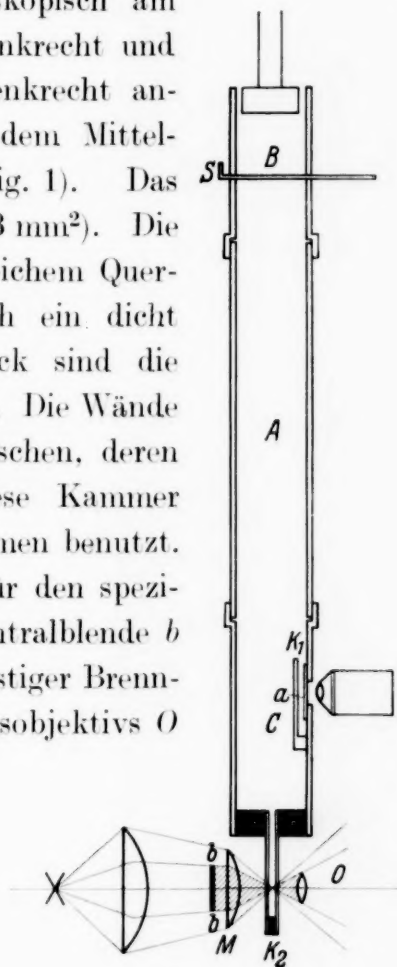


Fig. 1. Schallrohr mit Beobachtungskammern.

¹⁾ O. Brandt u. H. Freund, l. c.



Fig. 2.

a) Das Aerosol vor der Schalleinwirkung.

b) Beginn der Schalleinwirkung.

c) Beginn der Aggregation. Es erscheinen vergrößerte Teilchen.

d) Die aggregierten Teilchen bewegen sich in unregelmäßigen Bahnen.

e) Desgleichen.

f) Die Teilchen sind durch die Aggregation weiter vergrößert.

g) Desgleichen.

h) Das Aerosol nach dem Abschalten der Schallquelle. Die sehr stark vergrößerten Teilchen fallen senkrecht ab.

i) Desgleichen.

ist, lassen sich die an einem beliebigen Aerosol gewonnenen Ergebnisse auf alle Aerosole übertragen. Ein durch die stoffliche Natur bedingtes unterschiedliches Verhalten kann nur dadurch hervorgerufen werden, daß die Oberflächenbeschaffenheit der Teilchen ein Aneinanderhaften der Teilchen mehr oder weniger begünstigt. Dies dürfte aber nur in wenigen Extremfällen von maßgebendem Einfluß sein. Aus diesen Gründen hielten wir uns dazu berechtigt, ein chemisch so wenig homogenes Sol wie Tabakrauch als Versuchsnebel zu benutzen und die daran gemachten Erfahrungen zu verallgemeinern. Es ist auch belanglos, daß wir es mit einem stark ungleichteiligen Aerosol zu tun haben, da durch die Schalleinwirkung das Aerosol doch sogleich stark anisodispers wird.

Mikrokinematographische Aufnahmen während der Schalleinwirkung. Die mikrokinematographischen Aufnahmen wurden in der oben beschriebenen Anordnung gewonnen. Da es nicht möglich ist, die gesamten Bildserien, die jeweils eine Filmlänge von mehreren Metern umfassen, mitzuteilen, wurden aus den einzelnen Abschnitten des Vorganges typische Bilder ausgewählt

(Agfa Isochromfilm, Bildfrequenz etwa 15 Bilder je Sekunde). Das erste Bild der Serie (Fig. 2a) zeigt das Aerosol im Anfangszustand. Nach Einschalten der Schallquelle (Richtung des Schalles von oben nach unten) mit zunächst geringer Schwingungsenergie beginnen die Teilchen zu schwingen. Sie nehmen gleichzeitig an einer allgemeinen translatorischen Bewegung in Richtung der Rohrachse teil. Es ist wahrscheinlich, daß die Richtung dieser allgemeinen Bewegung von der speziellen Lage des Beobachtungsortes zu den Schwingungsknoten und Bäuchen abhängt, da es sich bei dieser Bewegung offenbar um die allgemeine Zirkulation¹⁾ des Gases von den Knotenpunkten nach den Schwingungsbäuchen handelt. Dies ist für das vorliegende Problem unwesentlich. Typisch ist, daß in diesem Stadium der Schalleinwirkung sich noch alle Teilchen im Gesichtsfeld zueinander parallel in stetigen Bahnen bewegen. Fig. 2b zeigt eine Aufnahme aus diesem Stadium. Bei weiterer Steigerung der Schallenergie wird ein Punkt erreicht, bei dem sehr plötzlich größere Teilchen erscheinen, die an der allgemeinen gleichgerichteten Bewegung nicht mehr teilnehmen. In Fig. 2c ist dieser Augenblick festgehalten. Bei einigen Teilchen ist die Bewegungsrichtung der vorherigen Aufnahme noch erhalten. Die durch den stärkeren Lichteindruck erkennbaren vergrößerten Teilchen dagegen beschreiben unregelmäßige Bahnen. In dem hier festgehaltenen Augenblick hat offenbar die Aggregation soeben eingesetzt.

Die vergrößerten Teilchen beginnen dann, sich in unregelmäßigen, oft scharf geknickten Bahnen mit erheblicher Geschwindigkeit durch das Gas zu bewegen. Bemerkenswert ist z. B. in Fig. 2d die Bahn in der rechten unteren Ecke der Aufnahme. Es scheinen dort zwei Bahnen in eine zu verlaufen. Dies ließe sich als einzelner Aggregationsvorgang zweier Partikel deuten. In den Aufnahmen Fig. 2d, e erkennt man auch viele weitere unregelmäßige und zum Teil scharf geknickte Bahnen. (Die verwaschenen Lichtflecke in den Aufnahmen rühren wahrscheinlich von lichtstarken Teilchenbahnen außerhalb der Einstellebene her. Daß sie sich im Bild d und e so stark bemerkbar machen, liegt an der für diese beiden Aufnahmen notwendigen sehr kontrastreichen photographischen Entwicklung.

In Fig. 2f ist die Aggregation weiter fortgeschritten. Die hellen Endpunkte in den beiden unregelmäßigen Bahnen im linken oberen Teil des Bildes f sind wahrscheinlich dadurch hervorgerufen, daß sich dort die Teilchen senkrecht zur Bildebene bewegt haben. Bemerkenswert ist auch die Spiralbahn in der rechten Hälfte des Bildes g. (Solche Spiralbahnen

¹⁾ E. N. da C. Andrade, Phil. Trans. (A) **230**, 413, 1932; Proc. Roy. Soc. London (A) **134**, 445, 1932.

zeigen sich häufig. Ebenfalls sind oft regelmäßige sinusförmige Bahnen zu beobachten, deren Schwingungsamplitude senkrecht zu der Schallschwingung steht. Da sich eine Gesetzmäßigkeit hierfür noch nicht finden ließ, haben wir diese Aufnahmen noch nicht mitgeteilt.)

Nach Ausschalten der Schallquelle fallen die durch Aggregation stark vergrößerten Partikel mit einer gegenüber den unaggregierten Teilchen (Fig. 2a) erheblichen Geschwindigkeit abwärts. Bild i zeigt die Bahnen abfallender Teilchen. Die zwischen Bild a und i liegende Zeit ist in der Größenordnung von 2 bis 3 sec. Wenn wir die Ergebnisse der kinematographischen Aufnahmen durch direkte mikroskopische Beobachtungen ergänzen, so läßt sich folgendes feststellen: Die unaggregierten kleinen Teilchen nehmen an der Schwingung des Gases teil und erscheinen je nach ihrer Amplitude als größere oder kleinere Striche in Richtung der Rohrachse. Gleichzeitig werden sie von der allgemeinen Zirkulation zwischen Knotenpunkten und Schwingungsbäuchen mitgenommen. Sobald die Teilchen durch Aggregation vergrößert sind, zeigen sie ein wesentlich anderes Verhalten. Sie bewegen sich in völlig unregelmäßigen Bahnen durch den Gasraum. Während dieser Bewegung vergrößern sie sich durch Aggregation weiter. Die scharfen Knicke in den Bahnen können vielleicht durch Zusammenstöße erklärt werden, obgleich in keiner Aufnahme der stoßende Partner sichtbar ist. Möglicherweise handelt es sich um kleine, sehr schnelle Teilchen, deren Bahnen sich im Bilde nicht abgezeichnet haben. Wiederum ändert sich das Verhalten der Teilchen, nachdem sie durch Aggregation eine gewisse Größe überschritten haben. Sie bewegen sich jetzt, ohne an der Schwingung des Gases teilzunehmen, in gleichmäßigen Bahnen und folgen der allgemeinen Zirkulation zwischen Schwingungsknoten und Schwingungsbäuchen.

Wir hoffen durch weitere mikrokinematographische Aufnahmen höherer Bildfrequenz den Vorgang noch weiter aufschließen zu können. Die Bildfrequenz bei den obigen Aufnahmen betrug etwa 15 Bilder je Sekunde¹⁾.

Bestimmung der Teilchenvergrößerung aus der Fallgeschwindigkeit. Um die Vergrößerung der Teilchen während der Beschallung quantitativ erfassen zu können, wurden Fallzeitmessungen in ultramikroskopischer

¹⁾ Die Amplitude der mitschwingenden Teilchen läßt sich als Funktion der Frequenz und des Teilchenradius auch in dem von W. König (Ann. d. Phys. 42. 353, 549, 1891) nicht erfaßten Gebiet der bei Aerosolen vorliegenden Teilchengrößen bestimmen. Der Verlauf dieser Funktion im Bereich der benutzten Frequenzen erlaubt eine weitgehende Auswertung in Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen. Hierüber wird in Kürze berichtet werden.

Anordnung gemacht. Nach der Stokes-Cunninghamschen Formel ist es möglich, aus der Fallgeschwindigkeit die Teilchengröße zu berechnen. Der Fehler¹⁾, den wir machen, indem wir das spezifische Gewicht der Teilchen zu 1 setzen, ist für die größenordnungsmäßige Bestimmung, auf die es uns zunächst nur ankam, belanglos. Zudem kann der Fehler auf das Resultat nur so einwirken, daß die berechnete Teilchenvergrößerung geringer ist als die wirkliche. Als Versuchsnebel diente vorerst wieder Tabakrauch, da auch für diese Versuche nur die Kolloidnatur maßgebend ist.

Die Untersuchungsmethode ist folgende. Im Mikroskop wurde vor und nach der Beschallung die Fallzeit möglichst schneller im Gesichtsfeld fallender Teilchen bestimmt. Es ist eine starke Schwankung der Fallzeiten zu erwarten, da das Aerosol stark anisodispers und es bei der subjektiven Beobachtung nur beschränkt möglich ist, die schnellsten Teilchen zu erfassen. Um diesen Fehler auszugleichen, wurden sehr viele Fallzeitmessungen nacheinander gemacht, was durch die Registrierung mittels eines Morseapparates ermöglicht wurde, auf dessen Registrierstreifen gleichzeitig Zeitmarken in Abständen von 1 sec automatisch geschrieben wurden. Die unten mitgeteilten Werte sind jeweils Mittelwerte aus etwa 50 Einzelmessungen ($\pm 40\%$ max. Schwankung).

Die Fallzeiten der unaggregierten Teilchen wurden 0, 10, 20 und 180 Minuten nach Einfüllen des Rauches gemessen. Sie wachsen erwartungsgemäß mit dem Alter des Rauches, da die größten Teilchen zuerst sedimentieren. Die Teilchengröße schwankt zwischen etwa 2 und 0.3μ .

Tabelle 1.

Schwingstabs- amplitude mm	Fallzeit für 1 mm sec	Radius in μ	Verhältnis der Radien r/r_0	Verhältnis der Massen m/m_0
0	2	1,8	—	—
$9 \cdot 10^{-3}$	1,3	2,3	1,28	2,1
$18 \cdot 10^{-3}$	0,56	3,7	2,06	8,7
$36 \cdot 10^{-3}$	0,4	4,3	2,4	13,6
$54 \cdot 10^{-3}$	0,06	10,5	5,85	200

In anderen Meßreihen wurde das Aerosol 1 Minute nach Einfüllen durch Öffnen des Schiebers S der Schallwirkung ausgesetzt. Die jeweilige Amplitude des Schwingstabes wurde vorher mikroskopisch gemessen. Unmittelbar nach der Schalleinwirkung wurden wieder Fallzeitmessungen vorgenommen. Die Ergebnisse einer solchen Meßreihe sind in der Tabelle 1

¹⁾ H. S. Patterson u. R. Whytlaw Gray, Proc. Roy. Soc. London (A) 113, 302, 1926.

zusammengestellt. Die jeweilige Beschallungsdauer betrug hier 5 sec. Die erste Rubrik gibt die Schwingstabamplitude wieder. In Rubrik 2 ist die Fallzeit, in Rubrik 3 der Teilchenradius, in Rubrik 4 das Verhältnis zwischen den Teilchenradien vor und nach der Beschallung angegeben. In Rubrik 5 ist das entsprechende Verhältnis für die Teilchenmassen eingetragen.

Mit der bei diesen Versuchen erreichten Schwingstabamplitude (Frequenz etwa 10 kHz) war also eine Vergrößerung auf das 200fache der Anfangsmasse zu erzielen, d. h. also, daß sich durchschnittlich 200 Einzelteilchen zu einem Aggregat vereinigt haben. In anderen Versuchen ließ sich sogar, allerdings unter Benutzung von Bestwerten, eine Vergrößerung auf das Mehrtausendfache feststellen. Da die Teilchenvergrößerung mit der Schwingstabamplitude, wie die Tabelle zeigt, stark wächst, ist bei weiterer Steigerung der Energie noch eine erhebliche Verstärkung des Effektes zu erwarten. Eine Steigerung der Schwingungsamplitude um eine Zehnerpotenz ist aber durchaus möglich und nur durch fehlende apparative Mittel bisher noch nicht erfolgt.

Untersuchungen über den Grad der Ausfällung. Wichtig für das ganze Problem ist die Vollständigkeit der Ausfällung. Es muß irgendeine Minimalkonzentration geben, bei der der gegenseitige Abstand der Teilchen so groß ist, daß die Wahrscheinlichkeit eines Zusammentreffens der Teilchen selbst bei intensiver Schalleinwirkung gleich Null ist. Diese minimalste Teilchenkonzentration (Teilchen pro cm^3) wurde größenordnungsmäßig festgestellt. Es wurde so vorgegangen, daß Nebel hoher Teilchenkonzentration eingefüllt, jeweils einige Zeit beschallt und mit der nächsten Beschallung sodann gewartet wurde, bis die vergrößerten Partikel sedimentiert waren. Vor jeder neuen Schalleinwirkung wurde die Teilchenkonzentration des noch vorliegenden Restrauches bestimmt. Die Anfangskonzentration vor der Beschallung wurde durch Auswägen der in einem bestimmten Volumen vorhandenen Aerosolmenge festgestellt. Die Teilchenkonzentrationen nach der Beschallung ließen sich, da sie wesentlich geringer sind, nach bekannter Methode durch Auszählen im Ultramikroskop messen. In der Tabelle ist in Rubrik 1 die Gesamtdauer der Schalleinwirkung notiert (Schallamplitude am Schwingstab $54 \cdot 10^{-3}$ mm). In Rubrik 2 ist die Teilchenkonzentration (Teilchen pro cm^3) und in Rubrik 3 die Gewichtskonzentration (mg/m^3) eingetragen.

Solange das Aerosol stark anisodispers ist, lassen sich Gewichtskonzentrationen und Teilchenkonzentrationen nicht ineinander umrechnen. Erst nach der Beschallung sind die Partikel des Restrauches ziemlich gleich-

teilig, wie sich aus Fallzeitmessungen ergab, so daß diese Umrechnung möglich ist.. Es findet also eine Abnahme der Gewichtskonzentration von $1,1 \cdot 10^4$ auf $3,25 \text{ mg/m}^3$ statt. Der Rückstand ist $0,03\%$ des Anfangsrauches. Die „Filterleistung“ ist also $99,97\%$ ¹⁾.

Tabelle 2.

Gesamtschalldauer sec	Teilchen im cm^3	Gewichtskonzentration mg/m^3
0	—	$1,1 \cdot 10^4$
5	$38 \cdot 10^4$	—
10	$4 \cdot 10^4$	6,5
20	$2 \cdot 10^4$	3,25
30	$2 \cdot 10^4$	3,25

Gleichzeitig zeigen die Messungen jedoch, daß unterhalb einer Konzentration von etwa $2 \cdot 10^4$ Teilchen/ cm^3 unter den vorliegenden akustischen Bedingungen keine Aggregation mehr zu erwarten ist. Dieser Restrauch bleibt also bestehen.

Ist c_1 die anfängliche Teilchenkonzentration, c_2 die Teilchenkonzentration des Restnebels und werden $p\%$ ausgefällt, so ist also $p = 100(1 - c_2/c_1)$. Da c_2 unter vergleichbaren Bedingungen als Konstante anzusehen ist, nimmt p mit c_1 ab.

Dem Direktor des Kölner Physikalischen Instituts, Herrn Prof. Dr. Rinkel, sind wir zu Dank verpflichtet für sein dauerndes Interesse und die Bereitwilligkeit, mit der er unsere Arbeiten unterstützte. Der Johann Hamspohn-Stiftung verdanken wir die Bereitstellung von Mitteln.

Köln, Physikalisches Institut der Universität, im Februar 1935.

¹⁾ Das in unserer letzten Arbeit (ZS. f. Phys. **92**, 385, 1934) auf S. 389 mitgeteilte Diagramm kann zu Irrtümern Anlaß geben, da die Kurven II und IV die Abszisse nicht erreichen. Die Ursache hierfür ist jedoch nicht ein noch vorhandener Restrauch, sondern eine Trübung der Glaswände durch niedergeschlagene Aerosolpartikel.

(Aus dem Forschungs-Institut der AEG.)

Die Streuabsorption der Elektronenstrahlen.

Von **A. Recknagel** in Berlin-Reinickendorf.

(Eingegangen am 20. Februar 1935.)

Die Bothesche Formel für die Massenabsorptionskoeffizienten von Elektronenstrahlen wird abgeändert, indem das streuende Atom durch ein Thomas-Fermi-Kraftfeld angenähert wird.

In einer Arbeit unter dem obigen Titel hat Bothe¹⁾ einen Weg angegeben, wie man Massenabsorptionskoeffizienten α/ρ für Elektronenstrahlen berechnen kann. Er erhält für den Absorptionskoeffizienten α die Formel

$$\alpha = 1,3 \cdot \lambda \quad (1)$$

mit

$$\frac{\lambda}{N} = \frac{1}{2} \int \vartheta^2 \cdot w(\vartheta) d\omega. \quad (2)$$

Dabei bedeutet N die Zahl der Atome im cm^3 , $w(\vartheta)$ den differentiellen Wirkungsquerschnitt für die Ablenkung eines Elektrons um den Winkel ϑ .

Bothe berechnet λ ²⁾ mit Hilfe der klassischen Formeln für die Streuung unter der Annahme, daß das Atom eine Punktladung Ze sei, die von einer gleichmäßig mit negativer Ladung erfüllten Kugel vom Radius R umgeben ist. Er erhält unter diesen Annahmen

$$\frac{\lambda}{N} = \pi \left(\frac{2Ze^2}{mv^2} \right)^2 \left(\log \frac{R}{p_1} - \frac{11}{12} \right). \quad (3)$$

m = Masse, v = Geschwindigkeit des Elektrons, p_1 = kleinster Stoßabstand.

Da die Annahmen über den Atombau, welche der Formel (3) zugrunde liegen, ziemlich willkürlich sind und da in das Endergebnis noch die Parameter R und p_1 eingehen, die experimentellen Werten entnommen werden müssen, soll hier eine in theoretischer Hinsicht befriedigendere Formel

¹⁾ W. Bothe, ZS. f. Phys. **54**, 161, 1929. — ²⁾ W. Bothe, Handb. d. Phys. XXII/2, 17, 1933.

abgeleitet werden. Wir benutzen zu diesem Zweck die Elektronenverteilung im Atom, wie sie sich aus der Theorie von Thomas und Fermi ergibt und betrachten, wie Bothe, nur die elastische Streuung. An Stelle der klassischen Formel verwenden wir den Ausdruck, den die relativistisch-quantenmechanische Stoßtheorie liefert. Dieser lautet¹⁾

$$w(\vartheta) d\omega = 2\pi \frac{e^4}{4m^2 c^4} \left(\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} \right)^4 \cdot \frac{Z^2 (1-F)^2}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}} \left\{ \frac{1}{1-\beta^2} - \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right\} \sin \vartheta d\vartheta \quad (4)$$

$$v = \beta \cdot c.$$

Der Atomformfaktor F ist die gleiche Funktion wie im nichtrelativistischen Falle. Diese ist z. B. tabuliert bei Mott und Massey²⁾. Es ist aber zu beachten, daß das dort benutzte Argument

$$\xi = \frac{\sqrt{\text{Volt}}}{Z^{1/3}} \cdot \sin \frac{\vartheta}{2}$$

im relativistischen Falle zu ersetzen ist durch

$$x = 506 \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{1}{Z^{1/3}} \sin \frac{\vartheta}{2}. \quad (5)$$

Führt man in (4) mit Hilfe von (5) x als Variable ein, so ergibt sich

$$w(\vartheta) d\omega = 8\pi \frac{Z^{4/3}}{506^2} \frac{1-\beta^2}{\beta^2} I(x) \left\{ \frac{1}{1-\beta^2} - \frac{Z^{2/3}}{506^2} x^2 \right\} x dx. \quad (4')$$

$I(x)$ ist die bei Mott und Massey tabulierte Funktion, dort $I(\Theta) \cdot \frac{1}{Z^{2/3}}$ genannt.

Aus (2), (4') und (5) ergibt sich schließlich

$$\frac{\lambda}{N} = 16\pi \cdot \frac{Z^{4/3}}{506^2} \frac{1-\beta^2}{\beta^2} \left\{ \frac{1}{1-\beta^2} J_1 - \frac{Z^{2/3}}{506^2} J_2 \right\}. \quad (6)$$

¹⁾ Siehe z. B. H. Bethe, Handb. d. Phys. XXIV/1, Formeln (50, 1), (50, 2) und (51, 13). Die Anwendung dieser Formeln (erste Bornsche Näherung) für kleinere Geschwindigkeiten und sehr schwere Atome kann bedenklich erscheinen.

²⁾ N. F. Mott u. H. S. W. Massey, Atomic Collisions, S. 126.

Dabei gilt

$$J_1 = \int_0^{x_0} \left(\arcsin \frac{x}{x_0} \right)^3 \cdot x I(x) dx, \quad (7)$$

$$J_2 = \int_0^{x_0} \left(\arcsin \frac{x}{x_0} \right)^2 x^3 I(x) dx, \quad (8)$$

$$x_0 = 506 \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{1}{Z^{1/3}}. \quad (9)$$

Um die beiden Integrale J_1 und J_2 in einfacher Weise auswerten zu können, zerlegen wir die Integration durch eine Trennstelle $\bar{x} < x_0$ in zwei Teile. \bar{x} soll dabei so gewählt werden, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $\arcsin x/x_0 = x/x_0$ für $x < \bar{x}$, und zwar für alle interessierenden Werte von x_0 .

2. Für $x > \bar{x}$ soll es möglich sein, $I(x)$ durch die Rutherford-Formel zu ersetzen, d. h.

$$I(x) = 1,29 \cdot 10^{-15} \cdot \frac{1}{x^4} \text{ cm}^2. \quad (10)$$

Es wurde $\bar{x} = 25$ gewählt. Die Bedingung $\bar{x} < x_0$ bedeutet dann eine Beschränkung auf solche Werte von β und Z , daß

$$506 \cdot \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{1}{Z^{1/3}} > 25 \quad (11)$$

gilt. Unsere Forderung 2 ist bei dieser Wahl von \bar{x} sehr genau erfüllt, die Bedingung 1 ist dagegen bei kleinen Geschwindigkeiten und sehr schweren Atomen nicht so gut erfüllt.

Man findet nun (in cm^2)

$$J_1 = \frac{1}{x_0^2} \int_0^{25} x^3 I(x) dx + \frac{1,29 \cdot 10^{-15}}{x_0^2} \int_{25/x_0}^1 (\arcsin u)^2 \cdot \frac{du}{u^3}, \quad (7')$$

$$J_2 = \frac{1}{x_0^2} \int_0^{25} x^5 I(x) dx + 1,29 \cdot 10^{-15} \int_{25/x_0}^1 (\arcsin u)^2 \frac{du}{u}. \quad (8')$$

Durch graphische Integration mit Hilfe der Tabelle von Mott und Massey ergab sich

$$(7) \quad \int_0^{25} x^3 I(x) dx = 2,5 \cdot 10^{-15}, \quad (7'')$$

$$(8) \quad \int_0^{25} x^5 I(x) dx = 3,6 \cdot 10^{-13}. \quad (8'')$$

(9) Das in (7') noch verbleibende Integral läßt sich elementar ausführen, das zweite Integral in (8') kann mit Hilfe einer Formel von Borda¹⁾ in eine sehr schnell konvergierende Reihe entwickelt werden. Beim Einsetzen der Integrationsgrenzen ist zu beachten, daß wir an der unteren Grenze konsequenterweise $\arcsin 25/x_0$ durch $25/x_0$ zu ersetzen haben, d. h. wir vernachlässigen zweite und höhere Potenzen von $25/x_0$. Diese Vernachlässigung bedeutet selbst bei kleinen Geschwindigkeiten und schweren Atomen nur einen Fehler von wenigen Prozent. Es ergibt sich dann schließlich

$$\text{Formel} \quad J_1 = 1,48 \cdot 10^{-15} \frac{1 - \beta^2}{\beta^2} \cdot \frac{Z^{2/3}}{506^2} \left\{ \log \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} - \frac{2}{3} \log Z + 4,55 \right\}, \quad (7''')$$

$$(10) \quad J_2 = 1,48 \cdot 10^{-15} \cdot 0,57. \quad (8''')$$

eine \log bedeutet Zehnerlogarithmus.

Setzt man jetzt die Werte für J_1 und J_2 nach (7''') und (8''') in (6) ein so ergibt sich endlich

$$(11) \quad \frac{\lambda}{N} = 1,13 \cdot 10^{-24} Z^2 \frac{1 - \beta^2}{\beta^4} \left\{ \log \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} - \frac{2}{3} \log Z + 4,55 - 0,57 \beta^2 \right\} \text{ cm}^2, \quad (12)$$

$$\text{, die} \quad \frac{\alpha}{\rho} = 0,89 \cdot \frac{Z^2}{A} \cdot \frac{1 - \beta^2}{\beta^4} \left\{ \log \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} - \frac{2}{3} \log Z + 4,55 - 0,57 \beta^2 \right\} \text{ cm}^2/\text{g}. \quad (13)$$

A = Atomgewicht der bremsenden Substanz. Der Gültigkeitsbereich dieser Formeln ergibt sich aus (11).

(7') *Diskussion.* Um einen Überblick darüber zu bekommen, wie die Bothesche Formel durch (13) abgeändert wird, stellen wir zunächst einige der nach (13) berechneten Massenabsorptionskoeffizienten mit den entsprechenden Botheschen und den experimentellen Werten zusammen²⁾.

(8')

¹⁾ W. Laska, Mathematische Formelsammlung, S. 32, Formel (10). —
²⁾ Vgl. W. Bothe, l. c., Tabelle 15.

Element	β	Nach Bothe	Nach (13)	Beobachtet
Al	0,3	2300	1700	2900
Al	0,6	100	92	83
Al	0,9	7,0	6,4	6,0
Ag	0,34	4300	3000	3070
Au	0,34	6800	4300	2880

Was beim Vergleich besonders auffällt, ist die Tatsache, daß die Botheschen Werte größer sind als die nach (13) berechneten. Mit steigender Geschwindigkeit nimmt nach beiden Formeln α/ρ ab. Diese Abnahme ist nach (13) wegen des Faktors $\log \frac{\beta^2}{1-\beta^2}$ schwächer als für die Botheschen Werte, und zwar so, daß für $\beta \rightarrow 1$ die Formel (13) größere Massenabsorptionskoeffizienten ergibt.

Wegen des Gliedes mit $\log Z$ ist der Verlauf von α/ρ , als Funktion von Z betrachtet, nach (13) flacher als der der Botheschen Werte. Das bedeutet, daß (13) die experimentelle Abhängigkeit von Z etwas besser wiedergibt als die Bothesche Formel. Doch reicht diese Verbesserung nicht aus, um die theoretischen Werte den experimentellen ganz anzupassen. Dies ist nicht weiter verwunderlich, da nach Bothe wesentlich für den zu steilen Anstieg der theoretischen Massenabsorptionskoeffizienten mit Z die Vernachlässigung der Rückdiffusion ist.

Berechnung optischer Terme mit Hilfe des statistischen Potentials von Fermi.

Von Ehrhard Hellmig in Leipzig.

Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 22. Februar 1935.)

Es werden die Rydberg-Korrekturen des Bogenspektrums für die s -, p -, d - und f -Terme berechnet¹⁾. Durch eine Ähnlichkeitsbetrachtung werden daraus die Kurven für die Funkenspektren erhalten. Die Theorie ist in guter Übereinstimmung mit der Erfahrung.

1. Allgemeine Theorie. Für die Spektraltermine gelten Rydberg-Formeln. Ihre Gültigkeit beruht darauf, daß für das betrachtete Elektron außerhalb des Atoms ein Coulomb-Feld herrscht. Im Innern des Atoms weicht das Potential vom Coulomb-Potential ab. Für kleine Energiewerte E haben die Wellenfunktionen für das Atompotential $V(r)$ und für ein zum Vergleich herangezogenes Coulomb-Potential pe/r (p = Zahl der im Rumpfe fehlenden Elektronen) genügend viele Nullstellen (Knoten), und es hat Sinn, von einer konstanten Phasendifferenz der beiden zu gleichen E gehörigen Wellenfunktionen außerhalb des Atoms zu sprechen. Ist $\Phi_a(r)$ die Phase der Wellenfunktion für das Atompotential mit der richtigen Randbedingung für $r = 0$, $\Phi_c(r)$ die Phase der Wellenfunktion für das Coulomb-Potential mit demselben Wert E und der Randbedingung für $r = 0$ (von Knoten zu Knoten soll sich Φ um 1 ändern), so ist die Rydberg-Korrektur

$$n - n^* = \Phi_a(r_0) - \Phi_c(r_0),$$

wo r_0 eine Stelle in großem Abstände vom Atom bedeutet. n und n^* sind Haupt- und effektive Quantenzahl. n^* ist definiert durch $E = -\frac{Rh}{n^{*2}} \cdot p^2$.

¹⁾ Die s -Terme wurden bereits berechnet von I. E. Fermi, ZS. f. Phys. **49**, 550, 1928. In dieser Arbeit wird aber ein anderes (genähertes) Potential benutzt. 2. U. Fano, Lincei Rend. (6) **20**, 35, 1934. Das in dieser Arbeit benutzte Potential ist mit dem von uns benutzten identisch. 3. E. Fermi u. E. Amaldi, Reale Acc. d'It. (Cl. di fis., mat. e nat.) **6**, 1934. In dieser Arbeit wird ein wahrscheinlich besseres Potential benutzt, in dem die Rückwirkung des Leuchtelektrons auf sich selbst eliminiert ist. Der Unterschied gegen unser Potential erweist sich aber im Ergebnis als belanglos. Die von Fermi berechneten Phasen der s -Eigenfunktionen stimmen mit den unsrigen überein. Allerdings sind die von Fermi berechneten Rydberg-Korrekturen gegen die unsrigen (wohl durch ein Versehen) um $\approx 0,25$ zu hoch.

Die Rydberg-Korrektur α im engeren Sinne, d. h. der Grenzwert von $n - n^*$ für sehr große n ist also die Phasendifferenz der Wellenfunktionen für das Potential des Atoms und das Coulomb-Potential, beide gelöst für den Energiewert $E = 0$ mit der richtigen Randbedingung bei $r = 0$.

Die Wellenfunktion $\psi(r)$ für die s -, p -, d -...-Terme ($l = 0, 1, 2, \dots$) ist gegeben durch die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi}{dr} + \left[\frac{2m}{\hbar^2} (E - V(r)) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \psi = 0, \quad (1)$$

wo $V(r) = -eU(r)$ die potentielle Energie des Leuchtelektrons im Felde seines p -fach ionisierten Rumpfes bedeutet.

Als Ausdruck für das Potential U wurde das Fermi-Potential eingesetzt, das gegeben ist durch

$$U(r) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{Ze}{r} \varphi_p\left(\frac{r}{\mu}\right) + \frac{pe}{r_0} & \text{für } r \leq r_0 \\ \frac{pe}{r} & \text{,, } r \geq r_0 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \mu = \frac{\beta}{Z^{1/3}} \cdot a_H; \\ \beta = \left(\frac{9\pi^2}{128}\right)^{1/3} \approx 0,88534, \end{array} \right\} \quad (2)$$

$a_H = 1$. Bohrscher Wasserstoffradius.

Dabei ist $\varphi_p(x)$ die Lösung der Fermi-Gleichung, die den Randbedingungen $\varphi(0) = 1$ (d. h. Coulomb-Feld in unmittelbarer Nähe des Kerns) und

$$\int_0^{x_0} \varphi_p^{3/2} x^{1/2} dx = 1 + x_0 \varphi'(x_0) = 1 - \frac{p}{Z},$$

(d. h. Gesamtzahl der negativen Ladungen gleich $Z - p$) genügt. r_0 ist der Rand des Ions.

Durch Einsetzen von (2) in (1) und durch die Transformation

$$\chi = \psi \cdot \frac{r}{\mu} = \psi \cdot x; \quad r = \mu \cdot x$$

ergibt sich als Wellengleichung für die Zustände mit $E = 0$:

a) Im Felde des p -fach ionisierten Atoms mit der Kernladungszahl Z :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d^2 \chi_a}{dx^2} + \left[\frac{2\mu}{a_H} \left(\frac{Z \varphi_p(x)}{x} + \frac{p}{x_0} \right) - \frac{l(l+1)}{x^2} \right] \chi_a = 0, \quad x \leq x_0 \\ \frac{d^2 \chi_a}{dx^2} + \left[\frac{2\mu p}{a_H x} - \frac{l(l+1)}{x^2} \right] \chi_a = 0, \quad x \geq x_0 \end{array} \right\} \quad (3)$$

b) Im Coulomb-Felde pe/r : ($p = 1, 2, 3 \dots$):

$$\frac{d^2 \chi_c}{dx^2} + \left[\frac{2\mu p}{a_H x} - \frac{l(l+1)}{x^2} \right] \chi_c = 0. \quad (4)$$

Da vom Rande $x = x_0$ ab die Differentialgleichung für χ_a mit der für χ_c identisch ist, so ändert sich von dort ab die Phasendifferenz nicht mehr, und die Rydberg-Korrektur α ist einfach die Phasendifferenz von χ_a und χ_c am Rande $x = x_0$:

$$\alpha = \Phi_a(x_0) - \Phi_c(x_0). \quad (5)$$

Die Phase $\Phi_a(x_0)$ wurde mit der Wentzel-Kramersschen Näherungsmethode¹⁾ gefunden. Wendet man sie bis zur ersten Näherung an, so ist die Phase von χ_a gegeben durch

$$\Phi_a(x_0) = \int_{x_a}^{x_0} y_a^{1/2} dx + \frac{1}{4} + (\sqrt{l(l+1)} - (l + \frac{1}{2})); \quad (6)$$

$$y_a = \frac{2\mu}{a_H} \left(\frac{Z \varphi_p(x)}{x} + \frac{p}{x_0} \right) - \frac{l(l+1)}{x^2},$$

wo x_a die Nullstelle von y_a (den klassischen Librationspunkt) bedeutet²⁾. Die Phase der s -Eigenfunktion, für die kein solcher existiert, wurde durch Aufsuchen der ersten Nullstelle von χ_a folgendermaßen festgelegt³⁾:

Das erste Klammerglied in y_a läßt sich schreiben in der Form

$$\frac{Z \varphi_p(x)}{x} + \frac{p}{x_0} = \frac{Z}{x} + a,$$

wo a ein Maß für die Abschirmung ist. In unmittelbarer Nähe des Kerns ist a gegen Z/x zu vernachlässigen, und (3) ist dort für die s -Wellenfunktion zu ersetzen durch

$$\frac{d^2 \chi_a}{dx^2} + \frac{2\mu Z}{a_H x} \chi_a = 0,$$

aus deren expliziter Lösung (Bessel-Funktion, siehe unten) man die erste Nullstelle entnimmt. Zur Sicherheit wurden die so erhaltenen Nullstellen

¹⁾ G. Wentzel, ZS. f. Phys. **38**, 518, 1926; H. A. Kramers, ebenda **39**, 828, 1926. — ²⁾ Das Phasenintegral ist auch in Einheiten von π zu messen. — ³⁾ In Anbetracht einer späteren Anwendung ist es wichtig zu bemerken, daß auch für $l = 0$ das Phasenintegral in (6) existiert und die richtige Phase liefert, wenn $x_a = 0$ gesetzt wird.

folgendermaßen kontrolliert: Für $0 \leq x \leq 0,3$ kann man näherungsweise setzen: $\varphi_p(x) \approx 1 - x$. Dann läßt sich χ_a in Form einer Reihe erhalten, aus der man die erste Nullstelle von χ_a entnimmt. Die auf diese Weise erhaltenen Nullstellen stimmen mit den ersteren bis auf geringe Unterschiede überein.

Die Phase $\Phi_c(x_0)$ von χ_c entnimmt man aus der expliziten, bei $x = 0$ verschwindenden Lösung von (4). Diese lautet¹⁾:

$$\chi_c = \sqrt{x} J_{2l+1} \left(\sqrt{\frac{8\mu p}{a_H}} x \right),$$

wo J_{2l+1} die Besselsche Funktion der Ordnung $2l + 1$ darstellt.

Zuweilen wird das Aufsuchen der Phase $\Phi_a(x)$ dadurch erschwert, daß die Funktion $y_a(x)$ in (6) mehrere Nullstellen hat und zwischen je zweien kleine negative Werte annimmt. Das tritt auf bei den f -Termen und in ähnlicher Weise bei den d -Termen. Dann ist obige Näherungsmethode nicht mehr anwendbar. Man umgeht diese Schwierigkeit, indem man die Näherungsformel soweit anwendet, wie sie gültig ist, und bestimmt damit eine äußerste Nullstelle der Eigenfunktion. Von da ab integriert man numerisch bis zu einer weiteren Nullstelle der Eigenfunktion, wo die Näherungsmethode wieder anwendbar ist, und bestimmt von dort aus die Phase wieder nach (6).

2. Das Bogenspektrum, die Funkenspektren. Im Bogenspektrum ist der Ionisationsgrad $p = 1$ zu setzen. Da der analytische Ausdruck von $\varphi_p(x)$ ²⁾ nicht bekannt ist, muß das Phasenintegral in (6) numerisch ausgewertet werden. Die Berechnungen wurden durchgeführt für $Z = 13,37$ ($\approx \text{Al}$), $37,96$ ($\approx \text{Sr}$), $69,74$ ($\approx \text{Yb}$) und $107,37$ (für diese Z nimmt der Faktor von φ_p/x in y_a die bequemen Zahlen 10, 20, 30 und 40 an).

Die Rydberg-Korrektionen der *Funkenspektren* ($p = 2, 3, \dots$) erhält man durch eine Ähnlichkeitsbetrachtung aus denen des Bogenspektrums. Unter Anwendung der Wentzel-Kramersschen Näherungsmethode auf

¹⁾ Siehe z. B. Jahnke-Emde, Funktionentafeln. — ²⁾ Die Werte von φ_p sind entnommen aus: E. Fermi, Reale Acc. d'It. (Cl. di fis., mat. e nat.) 1. Fis. Nr. 2, 1930. — Dort wird gesetzt: $\varphi_p = \varphi_0 - k\eta$, wo φ_0 die (ins Unendliche gehende) Lösung für das neutrale Atom, η eine universelle Funktion von x und k eine dort angegebene Funktion von p/Z ist. Die auf diese Weise berechneten Ränder x_0 stimmen nicht genau mit den von Fermi numerisch berechneten und in einer Arbeit von Sommerfeld (ZS. f. Phys. 78, 283) angegebenen überein. In unserer Berechnung wurde das aus den numerisch gefundenen Rändern bestimmte k eingesetzt, das sich aus der Bedingung $\varphi_p(x_0) = 0 = \varphi_0(x_0) - k\eta(x_0)$ ergibt.

(4) erhält man die Rydberg-Korrektur $\alpha(Z, l, p)$ nach (5) und (6) in der Darstellung:

$$\alpha(Z, l, p) = \int_{x_a}^{x_0} y_a^{1/2}(Z, l, p) dx - \int_{x_c}^{x_0} y_c^{1/2}(Z, l, p) dx$$

wo

$$y_a(Z, l, p) = \frac{2\beta}{Z^{1/3}} \left(\frac{Z \varphi_p(x)}{x} + \frac{p}{x_0} \right) - \frac{l(l+1)}{x^2}$$

$$y_c(Z, l, p) = \frac{2\beta p}{Z^{1/3} \cdot x} - \frac{l(l+1)}{x^2}$$

und x_a und x_c die Nullstellen von y_a und y_c sind. Da $\varphi_p(x)$ und x_0 nur vom Parameter p/Z abhängen, so folgt

$$y(Z, l, p) = p^{2/3} \cdot y\left(\frac{Z}{p}, l', 1\right), \quad \text{wo} \quad l'(l' + 1) = \frac{l(l+1)}{p^{2/3}},$$

und daraus ergibt sich

$$\boxed{\alpha(Z, l, p) = p^{1/3} \cdot \alpha\left(\frac{Z}{p}, l', 1\right)} \quad l'(l' + 1) = \frac{l(l+1)}{p^{2/3}}. \quad (7)$$

Insbesondere gilt für die s -Terme:

$$\alpha(Z, p) = p^{1/3} \cdot \alpha\left(\frac{Z}{p}, 1\right).$$

Die s -Rydberg-Korrekturen aller Funkspektren gehen also aus denen des Bogenspektrums durch bloße Maßstabsänderungen hervor. Die Kurven für die übrigen Terme erhält man durch Interpolation aus den Werten für das Bogenspektrum und darauffolgende Maßstabsänderung. Der Gültigkeitsbereich von (7) ist beschränkt durch die Grenzen der Anwendbarkeit der Fermi-Statistik (für $Z \lesssim 10$).

3. *Ergebnisse und Diskussion.* Die Ergebnisse sind in den Fig. 1 bis 6 graphisch dargestellt. Fig. 1 zeigt die Kurven für das Bogenspektrum. Der allgemeine Verlauf für die s - und p -Terme wird gut wiedergegeben. Die von Fermi berechnete Kurve für die s -Terme (verbessert entsprechend Fußnote 1, 3., S. 361) ist durch die eingezeichneten Kreuze angedeutet. Die zunehmende Abweichung nach größeren Z hin erklärt sich durch die bei Fermi mitberücksichtigten relativistischen Effekte. Eine Kontrolle der d -Kurve durch die Erfahrung ist noch nicht endgültig möglich wegen der Unvollständigkeit und der (für $Z \lesssim 40$) zufälligen einseitigen Auswahl der empirischen Werte. Eine Reihe von fehlenden Werten dürfte wohl als unter der theoretischen Kurve liegend zu erwarten sein (z. B. für $Z = 29, 30$).

Graphische Darstellung der Ergebnisse.
Rydberg-Korrekturen.

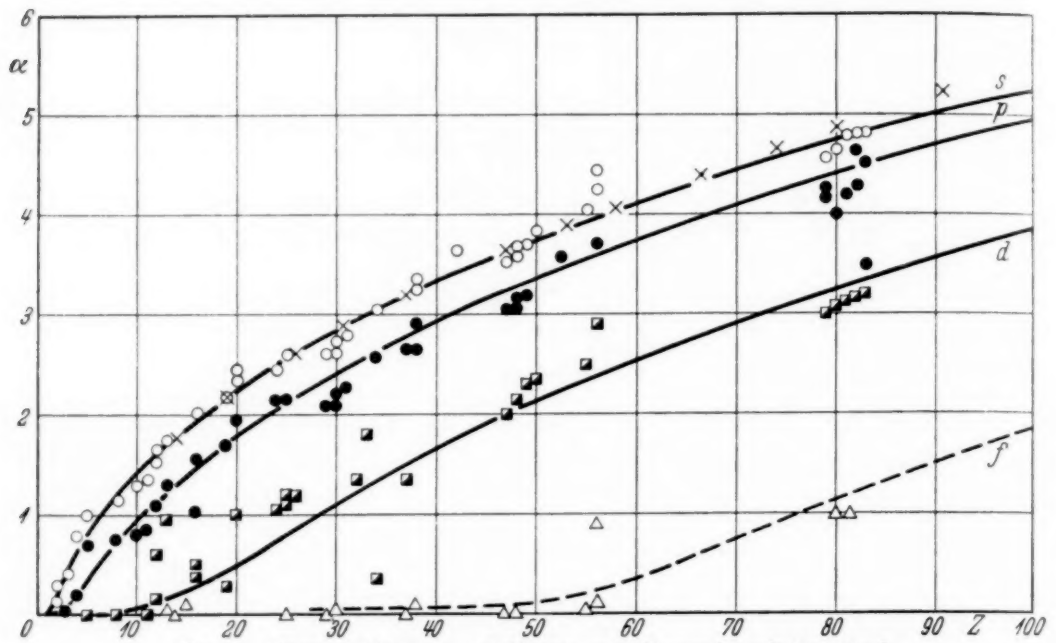


Fig. 1. Bogenspektrum. \times Werte von Fermi, relativistisch.

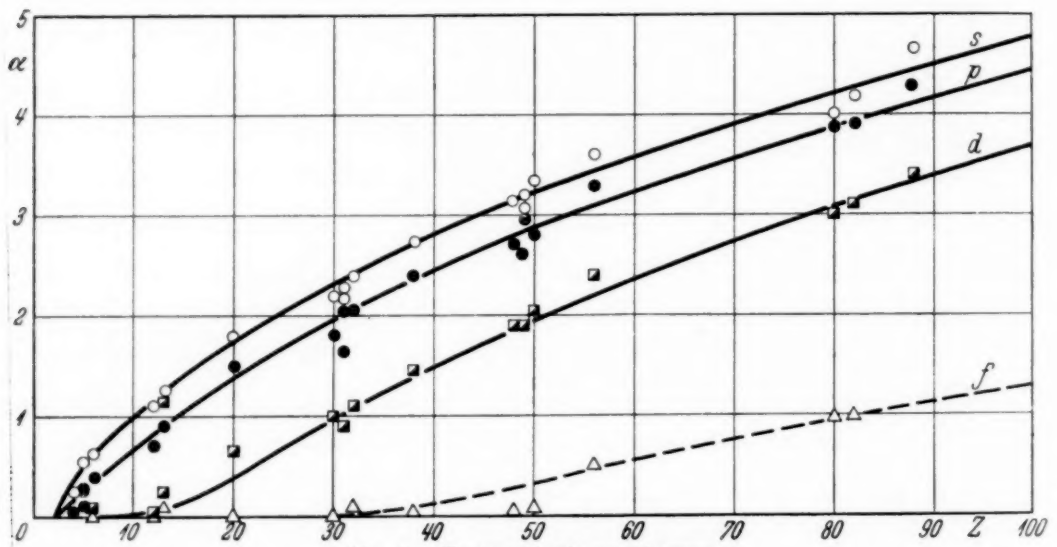


Fig. 2. Erstes Funkenspektrum.

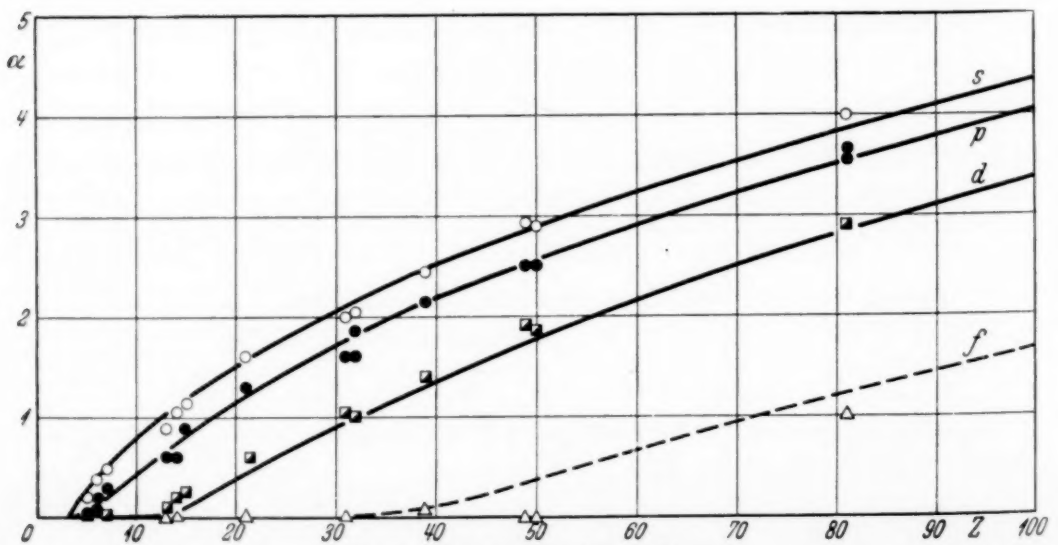


Fig. 3. Zweites Funkenspektrum.

Rydberg-Korrekturen.

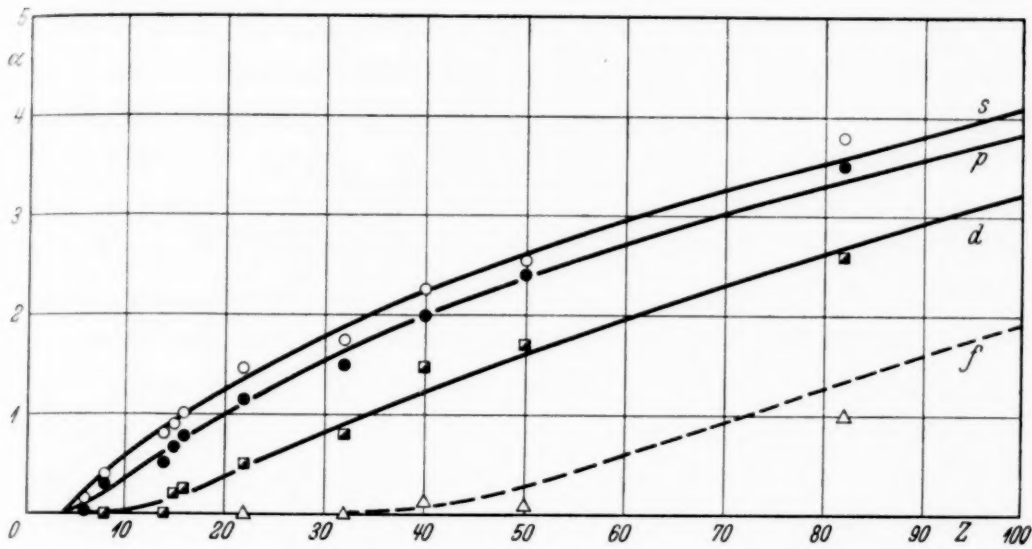


Fig. 4. Drittes Funkenspektrum.

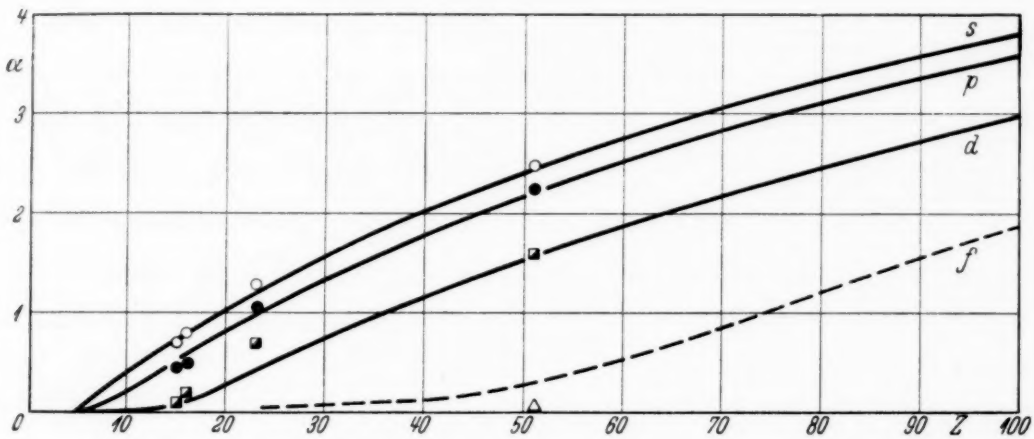


Fig. 5. Viertes Funkenspektrum.

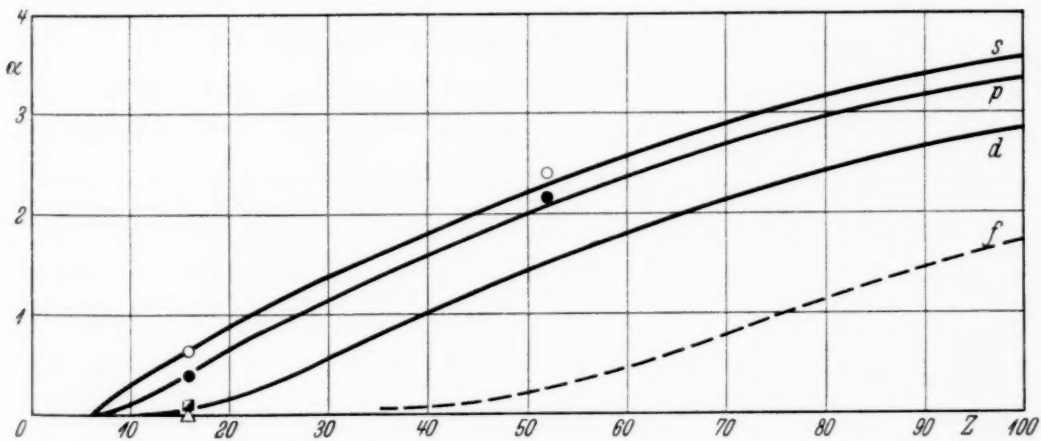


Fig. 6. Fünftes Funkenspektrum.

○ s-, ● p-, ■ d-, △ f-Term, empirische Werte.

und zugunsten der Richtigkeit des Kurvenverlaufs sprechen. Immerhin dürfte die theoretische Kurve nur eine grobe Annäherung an die wirklichen Verhältnisse sein, da die Sprunghaftigkeit und Streuung der empirischen Werte groß ist. Hier werden die vernachlässigten Effekte, insbesondere die „Randeffekte“, von ausschlaggebender Bedeutung. Infolgedessen ist es auch nicht möglich, unter Zugrundelegung des Pauli-Prinzips ein der Wirklichkeit entsprechendes Termschema der Atome (n^* als Funktion von Z) mit Hilfe der theoretischen Kurven aufzubauen. Ein Vergleich der f -Kurve mit der Erfahrung ist noch nicht möglich. Sie ist um etwa 0,1 unsicher. Die (nicht eingezeichnete) g -Kurve verläuft sehr tief und erreicht für $Z = 100$ die Größenordnung von 0,1 bis 0,2 (bis zu mindestens $Z = 107$ liegt der Librationspunkt noch außerhalb des Atomrumpfes).

In den Fig. 2 bis 6 sind die nach (7) berechneten Kurven für die Funkenspektren bis zur fünften Ordnung graphisch dargestellt. Die f -Kurven, für die die Anwendung von (7) wegen der mehrfachen Nullstellen von y_a nicht mehr berechtigt erscheint, sind gestrichelt eingezeichnet. Wie ein Überblick über die graphischen Darstellungen lehrt, wird der allgemeine Verlauf, soweit er zu prüfen ist, auch hier gut wiedergegeben. Die Kurve für die s -Terme des dritten Funkenspektrums stimmt mit der früher von Fermi berechneten¹⁾ überein.

Für die Anregung zu dieser Arbeit und die hilfsbereite Beratung bei deren Durchführung möchte ich Herrn Prof. Hund an dieser Stelle herzlichst danken.

Leipzig, Institut für theoretische Physik.

¹⁾ Siehe S. 364, Anm. 2.

Präzisionsmessung des $K\alpha_{1,2}$ -Dubletts einiger der leichteren Elemente.

Von Philip Haglund in Uppsala.

(Eingegangen am 24. Februar 1935.)

Mit einem Vakuumtubusspektrometer ist das $K\alpha_{1,2}$ -Dublett der Elemente 13 Al, 14 Si und 16 S getrennt und präzisionsgemessen worden. Die Dispersionskurve von Glimmer und ihre Genauigkeit wird diskutiert nebst ihrer Brauchbarkeit als Korrektionskurve wegen anomaler Dispersion.

Das $K\alpha_{1,2}$ -Dublett ist früher von Hjalmar¹⁾ ausgemessen worden. Er verfolgte das Dublett von 30 Zn bis auf 11 Na hinab, und es gelang ihm, die beiden Komponenten des Dubletts bis zu 16 S hinab zu trennen. Später hat Bäcklin²⁾ den $K\alpha_{1,2}$ -Dublett Abstand der leichteren Elemente bis zu 13 Al hinab ausgemessen und gleichzeitig den Einfluß der chemischen Bindung auf diese Dublette nachgewiesen. Nach Neumessung der Gitterkonstante von Glimmer hat schließlich Larsson³⁾ die Wellenlänge der zerlegten Dublette der Elemente 13 Al und 14 Si ausgemessen.

Früher hat der Verfasser⁴⁾ eine Mitteilung mit Beschreibung eines Vakuumtubusspektrometers veröffentlicht, das mit großer Präzision in dem langwelligen Röntgengebiet zu arbeiten gestattet. Aus mehreren Gründen ist eine Erhöhung der Präzision in den Wellenlängenwerten der stärksten langwelligen Röntgenlinien wünschenswert. In der Röntgenspektroskopie werden diese vielfach als Referenzlinien gebraucht, wobei natürlich der Fehler des erhaltenen Wellenlängenwertes größtenteils von der Genauigkeit der Referenzlinie abhängt. Daneben hängt die Bestimmung der Gitterkonstante von Kalkspat in absolutem Maß sowie des Wertes der Elektronenladung davon ab, daß man eine durch Kristallmessung genau bekannte Röntgenlinie hat, die sich auch für Gittermessungen eignet. Für die letzterwähnten Untersuchungen ist meistens das Al $K\alpha_{1,2}$ -Dublett gebraucht⁵⁾.

Im Jahre 1934 sind Präzisionsmessungen der zerlegten $K\alpha_{1,2}$ -Dublette der Elemente 13 Al, 14 Si und 16 S mit dem Vakuumtubusspektrometer ausgeführt. Dabei sind Kristall und Ordnung so gewählt, daß man den Glanzwinkel und damit auch die Dispersion so groß wie möglich erhielt. Daneben ist auch eine neue Bestimmung der Wellenlänge des nicht separierten

¹⁾ E. Hjalmar, ZS. f. Phys. **1**, 489, 1920; siehe auch ebenda **7**, 341, 1921. —

²⁾ E. Bäcklin, ebenda **33**, 547, 1925. — ³⁾ A. Larsson, Dissertation, Uppsala Univ. Årsskr. 1929. — ⁴⁾ Ph. Haglund, ZS. f. Phys. **84**, 248, 1933. — ⁵⁾ Siehe z. B. E. Bäcklin, Dissertation, Uppsala Univ. Årsskr. 1928.

Al $K\alpha_{1,2}$ -Dubletts ausgeführt worden. Als emittierende Substanz ist immer reines Element gebraucht worden; eine Verschiebung der Linien durch Einfluß chemischer Bindung wurde nicht wahrgenommen. Aber man muß mit gutem Vakuum arbeiten, damit das Antikathodenmaterial während des Betriebes nicht oxydiert wird und dadurch eine Verschiebung des Dubletts veranlaßt. Die Spaltbreite war bei diesen Messungen 0,08 mm. Eine Verminderung der Spaltbreite ergibt nicht eine höhere Schärfe dieser Linien, sondern verursacht nur eine Abnahme in Intensität, da die Linien an sich selbst ziemlich breit und diffus sind. Die Tubuslänge war bei den Expositionen des 13 Al-Dubletts gleich 373,33 mm und bei den Expositionen der 14 Si- und 16 S-Dublette gleich 404,72 mm. Als Referenzlinie hat stets 29 Cu $K\alpha_1$ — meistens in erster Ordnung — gedient. Diese Linie ist mit 12 kV und 25 mA in 15 bis 30 Minuten erhalten worden, je nach dem Kristall und der Ordnung, die zur Anwendung kommen. Um die $K\alpha_{1,2}$ -Dublette zu erhalten, wurde etwa die doppelte Anregungsspannung der entsprechenden Linie und 8 mA gebraucht, wobei die Expositionsdauern zwischen 15 und 25 Minuten liegen. Als Spaltbedeckung diente eine 0,5 μ dicke Al-Folie.

Alle Glanzwinkel φ wurden auf 18° C reduziert durch Addieren einer Größe $\Delta\varphi''$, die aus folgender Gleichung erhalten wird:

$$\Delta\varphi'' = a(t - 18) \operatorname{tg} \varphi.$$

Wenn $\Delta\varphi''$ in Bogensekunden ausgedrückt wird, hat die Größe a die folgenden Werte für die hier angewandten Kristalle:

Kalkspat: 2,10¹), Quarz: 2,78²), Gips: 7,79¹), Glimmer: 3,16¹).

Die Wellenlänge des 13 Al $K\alpha_{1,2}$ -Dubletts.

Die Dispersionskurve von Glimmer. Der übliche Wellenlängenwert des nicht separierten Al $K\alpha_{1,2}$ -Dubletts ist der von Larsson³) gegebene Wert $\lambda = 8322,48$ X-E. Dieser ist mit Glimmer in erster Ordnung erhalten und nach einer von demselben Verfasser experimentell bestimmten Dispersionskurve wegen der anomalen Dispersion in Glimmer korrigiert. Beim näheren Studium der experimentell erhaltenen Werte, die dieser Dispersionskurve zugrunde liegen, erscheint es doch fraglich, ob die Kurve von der Genauigkeit ist, daß sie zur Korrektur wegen der anomalen Dispersion gebraucht werden kann.

¹) M. Siegbahn, *Spektroskopie der Röntgenstrahlen*, 2. Auflage, Berlin 1931. — ²) A. H. Jay, *Proc. Roy. Soc. London (A)* **142**, 237, 1933. Der Ausdehnungskoeffizient von Quarz bei 18° C ist aus den dort angegebenen Werten von d_{100} zu $\alpha_{18} = 1,35 \cdot 10^{-5}$ ausgerechnet. — ³) A. Larsson, l. c. Siehe auch M. Siegbahn, l. c.

Nach Larsson zerlegen wir den Wert von δ/λ^2 in einen normalen und einen anomalen Betrag und bezeichnen sie mit $(\delta/\lambda^2)_n$ bzw. $(\delta/\lambda^2)_a$. Dann haben wir die Gleichung:

$$\frac{\delta}{\lambda^2} - \left(\frac{\delta}{\lambda^2}\right)_n = \left(\frac{\delta}{\lambda^2}\right)_a.$$

Nun ist die Variation in Larssons experimentell bestimmten Werten von δ/λ^2 und $(\delta/\lambda^2)_n$ wegen zufälliger Fehler viel größer als der Teilbetrag $(\delta/\lambda^2)_a$. Dadurch wird deutlich die Form der Kurve größtenteils unbestimmt und über die Größe und das Zeichen einer Korrektur wegen anomaler Dispersion kann wenig gesagt werden.

Um die Frage der anomalen Dispersion in Glimmer für den hier erwähnten Wellenlängenbereich aufzuklären und eine größere Genauigkeit zu erhalten, hat der Verfasser außer mit Glimmerkristall auch mit Gips- und Quarzkristallen gearbeitet. Die Dispersionskurven der letzterwähnten beiden Kristalle sind durch Larssons Untersuchungen sehr genau bestimmt worden, weshalb ein Vergleich der Ergebnisse in bezug auf die hier diskutierte Korrektur sehr wertvoll sein muß.

Ausführung und Ergebnisse der Messungen. Das $Al K\alpha_{1,2}$ -Dublett ist mit allen drei Kristallen — Glimmer, Gips und Quarz — in erster Ordnung aufgenommen. Mit Glimmer und Gips erhält man dann das unzerlegte Dublett, während mit Quarz die Komponenten getrennt werden. Als emittierende Substanz diente eine Al-Platte an der Antikathode. Die benutzten Referenzlinien, Ordnungen und Kristalle gehen aus den beigegebenen Tabellen hervor. Der Glanzwinkel von $Cu K\alpha_1$ in zweiter Ordnung gegen Glimmer ist von Larsson (l. c.) zu $80^\circ 53' 56'',1$ bestimmt worden. Wird der Glanzwinkel mit Kenntnis der Gitterkonstante und des Wellenlängenwertes¹⁾ errechnet, so erhält man den Wert $80^\circ 53' 54'',6$. Schließlich hat der Verfasser durch Doppelaufnahmen aufs neue den Glanzwinkel von $Cu K\alpha_1$ in zweiter Ordnung gegen Glimmer zu $80^\circ 53' 55'',2$ bestimmt. Diese drei Werte sind in guter Übereinstimmung. Unten ist der Wert $80^\circ 53' 55'',2$ benutzt worden.

Die Glanzwinkel von $Cu K\alpha_1$ in erster Ordnung gegen Gips und Quarz sind den Ergebnissen von Friesens²⁾ und Bergqvists³⁾ entnommen. Die erwähnten Glanzwinkel gegen Gips und Quarz sind $50^\circ 49' 16'',2$ bzw. $100^\circ 25' 58'',5$. Die Messungsergebnisse betreffend das $Al K\alpha_{1,2}$ -Dublett sind in den folgenden Tabellen (1 bis 3) wiedergegeben.

¹⁾ M. Siegbahn, l. c. — ²⁾ S. von Friesen, ZS. f. Phys. **54**, 629, 1929.

— ³⁾ O. Bergqvist, ebenda **66**, 494, 1930.

Tabelle 1. 13 Al.

Kristall: Glimmer [Gl. 12]. Ordnung I, $\log 2 d_1 = 4,2978731 - 11$.

Platte	ℓ^0	Referenzlinie $\text{Cu } K\alpha_1$ $n = 1$ φ_{2t}	Kristalldrehung			$\text{Al } K\alpha_{1,2}$		
			ψ	a in mm	$\Delta\varphi$	φ_t	φ_{18}	λ in X-E.
116	20 ⁰ 2	— 8° 53' 54",2	33° 35' 8",2	0,617	+ 5' 40",9	24° 46' 54",9	24° 46' 57",5	
117	20,3	— 54,1	50 4,7	1,003	— 9 14,4	56,2	59,5	
118	19,9	— 54,3	48 11,4	0,796	— 7 19,9	57,2	59,7	
119	20,6	— 53,9	35 0,7	0,630	+ 5 48,0	54,8	58,3	
121	21,0	— 53,7	47 2,2	0,677	— 6 14,2	54,3	58,5	
Mittelwert						24° 46' 58",7	8322,93	

Tabelle 2. 13 Al.

Kristall: Gips [Gi. 12]. Ordnung I, $\log 2 d_1 = 4,1806457 - 11$.

Platte	ℓ^0	Referenzlinie $\text{Cu } K\alpha_1$ $n = 1$ φ_{2t}	Kristalldrehung			$\text{Al } K\alpha_{1,2}$		
			ψ	a in mm	$\Delta\varphi$	φ_t	φ_{18}	λ in X-E.
125	17 ⁰ 2	— 5° 49' 16",8	38° 59' 57",6	0,829	+ 7' 38",0	33° 18' 18",8	33° 18' 13",2	
126	18,4	— 15,8	39 3 5,2	0,469	+ 4 19,2	8,6	10,1	
127	18,9	— 15,4	11 59,7	0,499	— 4 35,7	8,6	12,7	
128	18,0	— 15,9	0 6,9	0,797	+ 7 20,4	11,4	11,4	
129	18,7	— 15,5	5,1	0,682	+ 6 16,6	6,2	9,8	
Mittelwert						33° 18' 11",5	8322,87	

Korrektion wegen anomaler Dispersion in Gips hier gleich Null.

Tabelle 3. 13 Al. Kristall: Quarz [Qu. 12]. Ordnung I, $\log 2 d_1 = 3,928895 - 11$.

Platte	Linie	ϑ^0	Referenzlinie $\text{Cu } K\alpha_1 \quad n = 1$ φ_{2t}	Kristalldrehung			Gesuchte Linie	
				ψ	a in mm	$\Delta\varphi$	φ_t	φ_{18}
132	Al $K\alpha_1$	18,3	— $10^0 25' 58'',4$	88° 50' 1'',2	1,224	+ 11' 6'',3	78° 35' 19'',2	78° 35' 23'',3
133		18,6	—	52 2,9	1,004	+ 9 17,6	19,3	27,6
134		18,7	+ 58,3	67 55 0,3	1,562	+ 14 23,0	21,6	31,2
136		17,6	+ 58,6	58 2,5	1,253	+ 11 32,3	33,4	27,9
132	Al $K\alpha_2$	18,3	—	88 50 1,2	1,759	+ 16 11,8	40 14,7	40 18,9
133		18,6	—	52 2,9	1,549	+ 14 15,8	20,4	28,7
134		18,7	+ 58,3	67 55 0,3	2,117	+ 19 29,6	28,2	37,9
136		17,6	+ 58,6	58 2,5	1,794	+ 16 31,2	32,3	26,7

Mittelwerte der Glanzwinkel:

$\text{Al } K\alpha_1: \varphi_{18} = 78^\circ 35' 27'',5, \lambda = 8322,18 \text{ X-E.}$
 $\alpha_2: \varphi_{18} = 78^\circ 40' 28'',1, \lambda = 8324,62 \text{ X-E.}$

Die Wellenlängenwerte sind wegen anomaler Korrektion in Quarz korrigiert, welche Korrektion sich auf + 0.10 X-E. beläuft.

Tabelle 4. 14 Si. Kristall: Gips [Gi. 12]. Ordnung II, $\log 2 d_2 = 4,1808880 - 11$.

Platte	Linie	ϑ^0	Referenzlinie $\text{Cu } K\alpha_1 \quad n = 1$ φ_{2t}	Kristalldrehung			Gesuchte Linie	
				ψ	a in mm	$\Delta\varphi$	φ_t	φ_{18}
60	α_1	20,7	— $5^0 49' 14'',0$	75° 20' 1'',7	0,960	+ 8' 9'',1	69° 38' 56'',8	69° 39' 53'',5
61		21,0	—	23 0,8	0,595	+ 5 3,4	50,5	53,5
62		20,6	—	22 3,2	0,715	+ 6 4,6	53,8	48,4
63		20,2	+ 14,4	63 45 7,4	0,559	+ 4 45,0	39 6,8	53,0
61	α_2	21,0	—	75 23 0,8	0,979	+ 8 18,8	42 5,9	43 9,1
62		20,6	—	22 3,2	1,108	+ 9 24,4	13,6	8,4
63		20,2	+ 14,4	63 45 7,4	0,950	+ 8 4,1	25,9	12,2

Als Mittelwert aus den Messungen erhielt man:

$\text{Si } K\alpha_1: \varphi_{18} = 69^\circ 39' 52'',1, \lambda = 7110,66 \text{ X-E.}$
 $\alpha_2: \varphi_{18} = 69^\circ 43' 9'',9, \lambda = 7113,18 \text{ X-E.}$

Die Korrektion wegen anomaler Dispersion ist gleich Null zu setzen.

Schlüsse aus den Ergebnissen. Larssons experimentell erhaltener, nicht korrigierter Wellenlängenwert des $\text{Al } K\alpha_{1,2}$ -Dubletts ist $\lambda = 8322,94 \text{ X-E.}$ Dies ist in vollständiger Übereinstimmung mit dem hier erhaltenen Wert. Aber diese Wellenlängenwerte sind auch innerhalb der Meßfehler mit dem Wert in Übereinstimmung, der hier mit Gips erhalten ist. Das deutet darauf hin, daß der Effekt der anomalen Dispersion in Glimmer bei dieser Wellenlänge — wenn er überhaupt existiert — viel kleiner ist als Larssons Dispersionskurve ergibt. Geht man von den mit Quarz erhaltenen Komponenten aus, setzt ihr Intensitätsverhältnis gleich 2:1 und rechnet den Schwerpunkt zwischen ihnen aus, so kommt man zu dem Wellenlängenwert $\lambda = 8322,99 \text{ X-E.}$ Weiter hat auch Prof. Siegbahn kürzlich mit einem Spektrographen nach dem Prinzip der gebogenen Kristalle¹⁾ die Komponenten des zerlegten $\text{Al } K\alpha_{1,2}$ -Dubletts mit Glimmer in zweiter Ordnung ausgemessen. Die vorläufigen Ergebnisse — noch nicht publiziert — sind mir von Prof. Siegbahn zum Vergleich zur Verfügung gestellt.

$\text{Al } K\alpha_1: 8322,19 \text{ X-E.,}$

$\alpha_2: 8324,59 \text{ X-E.}$

Den Schwerpunkt erhält man bei $\lambda = 8322,99 \text{ X-E.}$ Die beiden letzten Beispiele sind weitere Nachweise für die Richtigkeit der Schlüsse oben betreffend die anomale Dispersion in Glimmer.

Darum wird hier keine Korrektion wegen anomaler Dispersion in Glimmer eingeführt.

Die Wellenlänge des $14 \text{ Si } K\alpha_{1,2}$ -Dubletts.

Als emittierende Substanz wurde kristallinisches Silicium, in eine Al-Platte eingerieben, gebraucht. Das Dublett wurde in zweiter Ordnung mit Gips aufgenommen. Referenzlinie war $\text{Cu } K\alpha_1$ in erster Ordnung mit dem Glanzwinkel $\varphi_2 = 5^\circ 49' 16,2''$. Die Messungsergebnisse sind in der Tabelle 4 zusammengestellt worden.

Die Wellenlänge des $16 \text{ S } K\alpha_{1,2}$ -Dubletts.

Auf eine Kupferantikathode wurde Schwefel eingerieben und das Dublett in erster Ordnung mit Kalkspatkristall aufgenommen. Referenzlinie war auch hier $\text{Cu } K\alpha_1$ in erster Ordnung mit dem Glanzwinkel $14^\circ 42' 3,9$. Die Tabelle 5 gibt das Resultat wieder.

¹⁾ H. Karlsson u. M. Siegbahn, ZS. f. Phys. **88**, 76, 1934.

Tabelle 5. 16 S. Kristall: Kalkspat [S.-R. 31 V], Ordnung 1, $\log 2d_1 = 3,7823347 - 11$.

Platte	Linie	θ^0	Referenzlinie $\text{Cu } K\alpha_1 \quad n=1$ φ_{2t}	Kristalldrehung			Gesuchte Linie	
				φ	a in mm	$\Delta\varphi$	φ_t	φ_{18}
56	α_1	20,3	— 14° 42' 2",6	76° 50' 2",8	0,774	+ 6' 34",5	62° 14' 34",7	62° 14' 43",8
57		20,3	— 2,6	2,8	0,776	+ 6 35,5	35,7	44,8
58		20,0	— 2,8	1,1	0,883	+ 7 30,1	34,0	42,0
59		20,7	— 2,4	44 58,4	1,466	— 12 27,4	33,4	44,2
56	α_2	20,3	— 2,6	76 50 2,8	1,178	+ 10 0,5	18 0,7	18 9,8
57		20,3	— 2,6	2,8	1,180	+ 10 1,4	1,6	10,7
58		20,0	— 2,8	1,1	1,292	+ 10 58,2	2,1	10,1
59		20,7	— 2,4	44 58,4	1,063	— 9 1,6	17 59,2	10,0

Mittelwerte der Ergebnisse:

$$S \, K\alpha_1: \varphi_{18} = 62^\circ 14' 43'',7, \lambda = 5361,10 \text{ X-E.}$$

$$\alpha_2: \varphi_{18} = 62^\circ 18' 10'',2, \lambda = 5363,92 \text{ X-E.}$$

Die Korrektion wegen anomaler Dispersion ist gleich Null.

Tabelle 6.

Stoff	Linie	λ in X-E.	Geschätzte Fehler in X-E.	ν/R	$\overline{\nu}/R$
Al	$K \alpha_{1,2}$	8322,90	$\pm 0,20$	109,489	10,4637
	α_1	8322,18	$\pm 0,20$	109,499	10,4642
	α_2	8324,62	$\pm 0,20$	109,467	10,4626
Si	α_1	7110,66	$\pm 0,15$	128,155	11,3206
	α_2	7113,18	$\pm 0,15$	128,110	11,3186
S	α_1	5361,10	$\pm 0,15$	169,978	13,0376
	α_2	5363,92	$\pm 0,15$	169,889	13,0341

Die Genauigkeit der angegebenen Wellenlängenwerte ist hauptsächlich von der Messung des Abstandes a zwischen den Linien auf der Platte abhängig. Wegen der zunehmenden Verbreiterung und Diffusität der Linien mit wachsender Wellenlänge sowie fallender Atomnummer wird die Ausmessung des Abstandes erschwert. Eine Erhöhung der Meßgenauigkeit durch Photometrieren der Platten dürfte sich kaum als möglich erweisen, da die Dublettlinien keine scharf markierten Gipfel in den Photometerkurven zeigen. Die zufälligen Fehler sind unter anderem in dem Abstände a , der Kristalldrehung ψ und der Temperaturkorrektur $\Delta\varphi''$ zu suchen. Daneben gibt es auch systematische Fehler, z. B. in dem Glanzwinkel φ der Referenzlinie und der Gitterkonstante d des Kristalls. In Tabelle 6 ist eine Zusammenstellung der Wellenlängenwerte nebst einer Schätzung der Meßfehler gegeben.

Bei der Berechnung von ν/R ist für die Rydbergsche Konstante R der Wert $\log R = 5,0403531$ benutzt.

Es ist mir hier eine angenehme Pflicht, Herrn Prof. Dr. M. Siegbahn für stetes Interesse, fruchtbare Ratschläge und Hinweise meinen herzlichsten Dank zu sagen.

Uppsala, Physikalisches Institut der Universität, Februar 1935.

Worin bestehen die angeblichen Unzulänglichkeiten des Nernstschen Wärmetheorems?

Von V. Njegovan in Zagreb.

(Eingegangen am 15. Februar 1935.)

Es wird gezeigt, daß alle scheinbaren Abweichungen vom Nernstschen Wärmesatz durch die innere Thermodynamik rein phänomenologisch erklärt werden können.

In der neuesten Zeit wird eine allgemeine Gültigkeit des Nernstschen Wärmetheorems von verschiedenen Seiten angefochten. Ich verweise dabei auf die Arbeit von K. Clusius¹⁾, welche diese Frage behandelt und wo weitere Literaturangaben zu finden sind. Der Zweck dieses Aufsatzes ist, zu prüfen, wo eigentlich der etwaige prinzipielle Fehler des Wärmesatzes zu suchen ist; dabei wollen wir versuchen, die ganze Frage *ausschließlich phänomenologisch* zu behandeln.

Wir vertreten die Auffassung, daß, wenn den phänomenologisch abgeleiteten Integralen noch gewisse „Konstanten“ hinzuzusetzen sind, dieselben auch phänomenologisch gedeutet werden müssen. Wenn das bisher nicht gelungen war, ist das nicht ein Beweis, daß eine solche Ableitung prinzipiell auch in der Zukunft nicht möglich ist.

Eine ganze Reihe „Dampfdruckkonstanten“ und „Affinitätskonstanten“ wurden bei bestimmten Temperaturen oder innerhalb bestimmter Temperaturintervalle experimentell ermittelt. Wenn diese auch nicht immer mit der Theorie stimmen, werden sie aber immer *selbstverständlich* als charakteristische Stoffkonstanten betrachtet, welche natürlich den Charakter der Integrationskonstanten haben müssen. In dieser *durch nichts bewiesenen Voraussetzung*, daß es sich hier um *absolute* Stoffkonstanten handelt, liegt nach unserer Ansicht die Hauptursache in den *scheinbaren* Unzulänglichkeiten des Nernstschen Wärmetheorems.

In der klassischen Definition der Entropie

$$\mathfrak{S} = \int_0^T c \frac{dT}{T} + S' \quad (1)$$

ist S' als Integrationskonstante zu betrachten. Nach Planck ist sie für feste Stoffe $S' = 0$, was im Einklang mit dem Wärmetheorem steht. Bei

¹⁾ K. Clusius, ZS. f. Elektrochem. **40**, 98, 1934.

den Gasen soll sie aber einen bestimmten Wert haben, welcher die Größe der Entropie bei $T = 1$ und $p = 1$ angeben soll.

Das Glied S' muß in erster Linie die Dimension einer Entropie haben, es muß aber auch seinen Ursprung in irgendeiner Energiegröße haben,

welche vordem nicht vorhanden war. Der erste Teil der Entropie $\int_0^T c \frac{dT}{T}$ hat seinen Ursprung in der von *außen* zugeführten Wärmemenge $Q = \int_0^T c dT$,

in ihm ist somit die *ganze* von außen zugeführte Energie aufgegangen, so daß für S' gar nichts übrig bleibt. Wenn S' eine Integrationskonstante darstellt, so muß sie bei der Differentiation verschwinden und beim Übergang auf die Energiegleichung verschwindet jede Spur der Entropiekonstante, was eigentlich sehr verwunderlich erscheint und phänomenologisch ganz absurd ist. Um diesen Fall erklären zu können, wollen wir zuerst annehmen, das Glied S' sei eine *Funktion* der Temperatur. Bei der Differentiation der Gleichung (1) bekommen wir dann

$$d\mathfrak{S} = c \frac{dT}{T} + dS' \quad (2)$$

und beim Übergang auf die Energiegleichung

$$T d\mathfrak{S} = c dT + T dS' = \delta\mathfrak{Q} = \delta Q + \delta Q'. \quad (3)$$

Wenn aber δQ die von *außen* zugeführte Wärmemenge bedeutet, so bleibt nichts anderes übrig, als für $\delta Q'$ die Quelle im *Innern* des Körpers selbst zu suchen. Solange man die spezifische Wärme als konstant betrachtet, besteht keine Möglichkeit, über die Energiemenge $\delta Q'$ eine konkrete physikalische Vorstellung zu gewinnen. Wenn wir aber in Betracht ziehen, daß die spezifische Wärme tatsächlich eine *Funktion* der Temperatur ist, so entsteht die Frage, wie die *Änderung* der spezifischen Wärme phänomenologisch zu deuten ist.

Wir wollen unsere Überlegungen zuerst an festen Stoffen machen, für welche wir aus der *Erfahrung* wissen, daß bei ihnen die spezifische Wärme beim absoluten Nullpunkt verschwindet. Erwärmen wir einen festen Körper vom absoluten Nullpunkt bis zur Temperatur T , so wird

die von außen zugeführte Wärmemenge $Q = \int_0^T c dT$ im Diagramm durch die

entsprechende Fläche dargestellt. Was bedeutet aber $\int_0^c T dc$? Es ist

offenbar nichts anderes als eine *isotherme* Zunahme der Energie, welche durch die Zunahme der spezifischen Wärme gegeben wird. Sie hat ihren Ursprung in großen, thermodynamisch unbestimmbaren Reserven der Energie, welche sich im Körper befindet und welche sich vorher durch nichts nach außen manifestiert hatte. Erst bei der Zuführung der Wärme von außen „erwacht“ sie auch teilweise, indem sie eine Zunahme der spezifischen Wärme hervorruft. Ein Teil dieser inneren Energie wandelt sich dabei in eine Form um, die den Charakter der *latenten* Wärme hat, und welche durch den Ausdruck $\int_0^c T dc$ gegeben wird. Diese so entstandene latente Wärme habe ich als „innerer Effekt“ bezeichnet¹⁾.

Die Zunahme der „*gesamten aktiven inneren Energie*“ (Wärmeinhalt plus innerer Effekt) des festen Körpers wird also durch die Gleichung

$$\delta \mathfrak{Q} = \int_0^T c dT + \int_0^c T dc = \delta Q + \delta Q' = cT \quad (4)$$

dargestellt. Beim absoluten Nullpunkt verschwinden *erfahrungsgemäß* beide Glieder. Die Wärmekapazität c stellt uns somit den „Kapazitätsfaktor“ der gesamten aktiven inneren Energie dar.

Dieselben Überlegungen auf den Kirchhoffschen Satz übertragen ergeben

$$\mathfrak{U} = U_0 + \int_0^T c_2 dT - \int_0^T c_1 dT + \int_0^{c_2} T dc_2 - \int_0^{c_1} T dc_1, \quad (5)$$

wo c_1 und c_2 die spezifischen Wärmen des Anfangs- und Endzustandes bedeuten. Daraus folgt die Formel für die gesamte innere Energie zweier fester allotroper Modifikationen

$$\delta \mathfrak{Q}_1 = \int_0^T c_1 dT + \int_0^{c_1} T dc_1, \quad (6)$$

$$\delta \mathfrak{Q}_2 = \int_0^T c_2 dT + \int_0^{c_2} T dc_2 + U_0, \quad (6a)$$

wobei U_0 die Wärmetönung beim absoluten Nullpunkt bedeutet.

Für die Entropie des festen Zustandes hätten wir

$$\mathfrak{S} = \int_0^T c \frac{dT}{T} + \frac{1}{T} \int_0^c T dc = \int_0^T c \frac{dT}{T} + S'. \quad (7)$$

¹⁾ V. Njegovan, Acta phys. Pol. 2, 425, 1934; 3, 213, 1934.

Der Ausdruck $\frac{1}{T} \int_0^c T \, dc$ folgt aus dem Charakter des inneren Effektes als *latente* Wärme und verschwindet beim absoluten Nullpunkt, so daß seine Existenz *nicht im Widerspruch* mit der Planckschen Fassung des Wärmetheorems steht. Der innere Effekt und die Entropie des inneren Effektes oder kürzer die „innere Entropie“, können für bestimmte Temperaturen (z. B. 298,1°) leicht aus vorhandenen Daten für spezifische Wärmen und Wärmehalt auf Grund der Gleichung (4) berechnet werden. Die inneren Entropien einiger fester Elemente variieren zwischen 1 bis 2 cal/Grad. Die innere Entropie erklärt uns somit den scheinbaren Widerspruch mit dem Nernst'schen Wärmetheorem, welcher durch das Auftreten der sogenannten Nullpunktsentropie sich geltend macht.

Für die inneren Entropien zweier fester allotroper Modifikationen hätten wir

$$\mathfrak{S}_1 = \int_0^T c_1 \frac{dT}{T} + \frac{1}{T} \int_0^{c_1} T \, dc_1, \quad (8)$$

$$\mathfrak{S}_2 = \int_0^T c_2 \frac{dT}{T} + \frac{1}{T} \int_0^{c_2} T \, dc_2. \quad (8a)$$

Dabei soll gleich an die bekannte Tatsache erinnert werden, daß U_0 *nicht* in die Entropiegleichung der zweiten Modifikation eingeht, weil nach Nernst beim absoluten Nullpunkt die ganze Wärmetönung als *freie Energie* auftritt und *keinen* Einfluß auf die Entropiegröße haben kann.

Wenn wir unsere Auffassung auf die Helmholtzsche Gleichung übertragen, so bekommen wir

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{F} &= -T \int_0^T \frac{\mathfrak{U}}{T^2} \, dT = -T \int_0^T \frac{U}{T^2} \, dT - T \int_0^T \frac{U'}{T^2} \, dT \\ &= -U_0 - T \int_0^T \frac{dT}{T^2} \int_0^T (c_2 - c_1) \, dT + \int_0^{c_2} T \, dc_2 - \int_0^{c_1} T \, dc_1 \\ &= F + F' = U + U' - T(S + S') \\ &= \mathfrak{U} - T \mathfrak{S}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Die Größe

$$- \int_0^T \frac{U'}{T^2} \, dT = \mathfrak{S} \quad (10)$$

ist nach unserer Auffassung identisch mit der Konstante \mathfrak{Z} , welche für feste Stoffe (beim absoluten Nullpunkt!) gleich Null sein soll. A. Eucken hat aber bekanntlich gefunden, daß das häufig nicht der Fall ist, womit die allgemeine Gültigkeit des Wärmesatzes in Frage gestellt wurde. Vorhandene Messungen (Diamant-Graphit, rhombischer und monokliner Schwefel, graues und weißes Zinn, festes und flüssiges Äthanol und n-Propanol¹⁾) deuten auf ein reelles \mathfrak{Z} bei gewöhnlicher Temperatur hin, genügen aber heute noch nicht, um die Gleichungen (9) bzw. (10) quantitativ zu bestätigen; eines steht aber fest, daß \mathfrak{Z} beim absoluten Nullpunkt verschwindet, was im Einklang mit dem Wärmetheorem ist.

Wir wollen jetzt den Übergang des festen Zustandes in den Gaszustand betrachten. Dabei scheiden wir vorläufig absichtlich den flüssigen Zustand aus, weil hier die Verhältnisse bei niedrigen Temperaturen noch am wenigsten bekannt sind.

Für die Sublimation der Gase gilt der Ausdruck

$$\mathfrak{Q} = L_0 + c_p^0 T + \int_0^T c_p' dT - \int_0^T c_f dT + \int_0^{c_p'} T d c_p' - \int_0^{c_f} T d c_f. \quad (11)$$

Die Zunahme der gesamten aktiven inneren Energie des Gases wäre somit

$$\mathfrak{Q} = c_p^0 T + \int_0^T c_p' dT + \int_0^{c_p'} T d c_p' + L_0 \quad (12)$$

und die entsprechende Entropiegleichung

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} = \int_0^{T_s} c_f \frac{dT}{T} + \frac{L_0}{T_s} + c_p^0 + \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} c_p' dT - \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} c_f dT \\ + \int_{T_s}^T c_p' \frac{dT}{T} + \frac{1}{T} \int_0^{c_p'} T d c_p'. \end{aligned} \quad (13)$$

Die innere Entropie des Gases $\frac{1}{T} \int_0^{c_p'} T d c_p'$ kann uns die in der neuesten

Zeit gefundene Diskrepanz erklären, welche als eine Abweichung vom Wärmesatz betrachtet wird. Über die Größe dieses Gliedes ist vorläufig schwer etwas auszusagen, da entsprechende Messungen der spezifischen Wärmen

¹⁾ K. K. Kelley, Journ. Amer. Chem. Soc. **51**, 779, 1929; S. Mitsukuri u. K. Hara, Phys. Ber. **10**, 892, 1575, 1929.

der Gase in der Nähe des absoluten Nullpunktes noch sehr spärlich sind. Es liegen nur die bekannten Messungen von Eucken an Wasserstoff und Helium vor. Bei Wasserstoff berechnet sich dieser Wert rund gleich 1.

Für $T = 1$ ergeben die Gleichungen (11), (12) und (13)

$$\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{Q}_0 = \mathfrak{S}_0 = L_0 + c_p^0. \quad (14)$$

Aus denselben Gründen wie bei der Umwandlung fester allotroper Modifikationen kann auch hier die Wärmetönung beim absoluten Nullpunkt *nicht* die Größe der Entropie beeinflussen, da sie nach dem Wärmetheorem ganz als *freie* Energie auftreten muß. Der Unterschied ist nur der, daß hier noch c_p^0 eingeht, welches wir auch als eine Art des inneren Effektes deuten müssen. Beim Übergang der festen Phase in die gasförmige beim absoluten Nullpunkt wird die Wärmemenge L_0 von *außen* zugeführt, gleichzeitig wächst die spezifische Wärme von 0 bis c_p^0 . Dieser Zuwachs der spezifischen Wärme ist auf Rechnung der *inneren* Reserven des Körpers an nicht-aktueller innerer Energie zu setzen, ganz analog wie wir das bei obigen Beispielen gesehen haben, mit dem Unterschiede, daß er hier nicht als latente Wärme, sondern als *freie* Energie auftritt.

Die Entropiegleichung (13) sollte demnach lauten

$$\mathfrak{S} = \int_0^{T_s} c_f \frac{dT}{T} + \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} c_p' dT - \frac{1}{T_s} \int_0^{T_f} c_f dT + \int_{T_s}^T c_p' \frac{dT}{T} + \frac{1}{T} \int_0^{c_p', T} T d c_p'. \quad (15)$$

Dabei sei bemerkt, daß unter L_0 und c_p^0 die *tatsächlich* beim absoluten Nullpunkt *gemessenen* Werte zu verstehen sind.

Wir können unsere Überlegungen weiter noch auf die Clapeyron-Clausius'sche Gleichung für die Sublimation anwenden und erhalten

$$\left. \begin{aligned} \log p &= \frac{1}{2,3 R} \int_0^T \frac{-L}{T^2} dT + \frac{1}{2,3 R} \int \frac{-L'}{T^2} dT \\ &= -\frac{L_0}{2,3 R T} + \frac{c_p^0}{2,3 R} \log T + \frac{1}{2,3 R} \int_0^T \frac{dT}{T^2} \int_0^T (c_p' - c_p) dT \\ &\quad + \frac{1}{2,3 R T} \int_0^{c_p'} T d c_p' - \frac{1}{2,3 R T} \int_0^{c_f} T d c_f. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Wir setzen

$$\frac{1}{2,3 R T} \int_0^{c_p'} T d c_p' - \frac{1}{2,3 R T} \int_0^{c_f} T d c_f = i_p - i_f = i \quad (17)$$

und erhalten die empirisch bestimmte „Dampfdruckkonstante“ i ; welche aber beim absoluten Nullpunkt verschwindet, ganz analog der Gleichung (10) bei festen Körpern. Die so definierte „empirische“ Dampfdruckkonstante wird aber in gewissem Maße von der allotropen Modifikation des Bodenkörpers abhängig sein, da für jede allotrope Modifikation ein besonderes i_f anzunehmen ist. Zukünftige Messungen über *verschieden geartete* Bodenkörper sollen über die Richtigkeit dieser Schlußfolgerung entscheiden¹⁾.

Beim Übergang von den Sublimationsgleichungen auf die Affinitäts-gleichung (freie Energie) heben sich bekanntlich alle Glieder auf, welche sich auf *feste* Phasen beziehen, und somit auch i_f , und wir bekommen:

$$\mathfrak{J} = - \sum n i_p. \quad (18)$$

Wir sehen also, warum die Affinitätskonstante (\mathfrak{J}) *nicht gleich* der Summe *empirischer* Dampfdruckkonstanten (i) sein kann, womit auch diese scheinbare Abweichung von dem Wärmetheorem glatt erklärt wird.

Für $T = 1$ und $pv = RT$ reduziert sich die Gleichung (16) auf

$$L_0 = - 2,3 R \log p_0 = - \int_0^{p_0} v \, dp = - F_0. \quad (19)$$

Da $\int_0^{p_0} v \, dp$ thermodynamisch die Dimension der freien Energie hat, so hat auch der ganze Ausdruck (19) diese Dimension und kann daher nicht den Bestandteil der Entropie bilden.

Die Gleichung (11) können wir somit schreiben

$$\mathfrak{Q} = - \int_0^{p_0} v \, dp + c_p^0 T + \int_0^T c'_p \, dT - \int_0^T c_f \, dT + \int_0^{c'_p} T \, dc'_p - \int_0^{c_f} T \, dc_f.$$

Sie gilt für den Druck p_0 ; für einen anderen Druck p , wird sie die Form

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q} &= - \int_0^p v \, dp + c_p^0 T + \int_0^T c'_p \, dT - \int_0^T c_f \, dT + \int_0^{c'_p} T \, dc'_p - \int_0^{c_f} T \, dc_f \\ &= - \int_0^p v \, dp + (c_p^0 + c'_p - c_f) T \end{aligned} \quad (20)$$

¹⁾ Hiermit sollen die Gleichungen (20) bis (22) (l. c. S. 432) berichtigt werden und die Gleichungen (23) bis (23a) werden dadurch hinfällig.

haben, wodurch die bekannten Abweichungen vom ursprünglichen Kirchhoffschen Satze bei größeren Druckdifferenzen erklärt werden können. Dasselbe gilt auch für Gleichung (12), welche wir somit schreiben können

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q} &= c_p^0 T + \int_0^T c_p' dT + \int_0^{c_p'} T dc_p' - \int_0^p v dp \\ &= (c_p^0 + c_p') T - \int_0^p v dp \end{aligned} \quad (21)$$

und welche der schon bekannten thermodynamischen Beziehung entspricht. Für $T = 1$ und $p = p_0$ ergeben beide Ausdrücke die Gleichung (14).

Um aus der Gleichung (21) die Gleichung für die Entropie der Gase abzuleiten, müssen wir analog der Gleichung (8a) von ihr zuerst den Wert

$$L_0 + c_p^0 = - \int_0^{p_0} v dp + c_p^0 = -2,3 R \log p_0 + c_p^0$$

subtrahieren und wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &= \int_0^T c_p' \frac{dT}{T} + \frac{1}{T} \int_0^{c_p'} T dc_p' - \int_0^p \frac{v dp}{T} + \int_0^{p_0} v dp \\ &= \int_0^T c_p' \frac{dT}{T} + \frac{1}{T} \int_0^{c_p'} T dc_p' - 2,3 R \log \frac{p}{p_0}; \end{aligned} \quad (22)$$

dieser Wert muß mit dem Werte (15) identisch sein und verschwindet mit $T = 1$ und mit dem entsprechenden Dampfdruck p_0 .

Diese Überlegungen gelten natürlich auch für die Clapeyron-Clausius'sche Gleichung in unserer Fassung [Gleichung (16) und (17)] und wir erhalten

$$\log p = \frac{1}{2,3 R} \int_0^p \frac{v dp}{T} = \frac{1}{2,3 R T} \int_0^p v dp + \frac{c_p^0}{2,3 R} \log T + \frac{1}{2,3 R} \int \int + i \quad (23)$$

Da der Übergang zweier fester allotroper Modifikationen eben in einer (sprunghaften) Änderung des Volumens besteht, wird U_0 (S. 379) offenbar auch durch $\int_0^p v dp$ darzustellen sein, weil es nach Nernst auch als freie Energie auftritt.

Da also $L_0 + c_p^0$ überhaupt nicht den Inhalt der Gasentropie bildet, ist es ganz irrelevant, ob c_p^0 bei $T = 1$ einen endlichen Wert hat oder gleich Null ist; die Gasentropie verschwindet auf jeden Fall mit $T = 1$ und $p = p_0$, so daß das Wärmetheorem auch für Gase ohne jede „Entartung“ vollkommen gültig ist.

Für Flüssigkeiten ist vorläufig noch nicht entschieden, ob bei ihnen die spezifische Wärme mit $T = 1$ verschwindet oder nicht. Nach unserer Auffassung ist das aber vollkommen irrelevant; insofern die Flüssigkeiten bei $T = 1$ auch eine endliche spezifische Wärme haben sollten, tritt sie auf als ein Teil der freien Energie und bildet nicht den Bestandteil der Entropie.

Durch die Einführung des inneren Effektes können somit *alle* scheinbaren Abweichungen vom Nernstschen Wärmesatz einfach und restlos erklärt werden. Diese Erklärungen tragen natürlich vorläufig nur einen *qualitativen* Charakter, erst zukünftige Messungen bei tiefen Temperaturen sollen auch *quantitativ* die Existenz des inneren Effektes beweisen. Die Lehre vom inneren Effekt ist somit als eine *Erweiterung und Vervollkommnung* des Nernstschen Wärmesatzes zu betrachten und kann als *innere Thermodynamik* im Gegensatz zu der klassischen (*äußeren*) bezeichnet werden. Beide zusammen bilden dann die *vollständige* Thermodynamik. Der Nernstsche Wärmesatz erscheint uns somit nicht so sehr als ein „drittes“ Gesetz, sondern eher als ein Keim eines neuen Wissensgebietes — der inneren Thermodynamik.

Zagreb, Jugoslaviens, Technische Fakultät.

(Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Königl. Ungarischen Universität für technische und Wirtschaftswissenschaften.)

Über den Zeeman-Effekt der Störungsstellen des $A^1\Pi$ -Zustandes in CO.

Von R. Schmid und L. Gerö in Budapest.

Mit 3 Abbildungen. (Eingegangen am 16. Februar 1935.)

Die Beobachtungen über den Einfluß des magnetischen Feldes auf die gestörten Linien der Ängström- und Herzberg-Banden werden an Hand einer Darstellung der verschiedenen Störungen des $A^1\Pi$ -Zustandes zusammengestellt. Zur Kenntnis der Natur der störenden Terme werden einige Daten dieser aus der Lage der gestörten Linien abgeleitet.

I. In der vorliegenden Arbeit sollen die Aufnahmen [die zwecks anderer Untersuchungen¹⁾ erhalten worden sind, und welche die Banden von CO, CO⁺ und CO₂ in der Gegend von 3800 bis 4500 Å in guter Auflösung und Lichtstärke aufweisen] betreffend die Beobachtungen über den Zeeman-Effekt der gestörten Linien der Ängström- und Herzberg-Banden, verwertet werden.

Die erste einschlägige Arbeit stammt von Crawford²⁾. Eine weitere Untersuchung wurde von Watson³⁾ vorgenommen. Zur Zeit dieser letzteren war der eigentliche Charakter der Störungen noch nicht erkannt. Watson selbst behandelt den experimentellen Befund auf Grund der Annahme, daß der Störungsvorgang einer Kreuzung des $A^1\Pi$ -Endterms mit einem $^3\Pi$ -Zustand zuzuschreiben sei, während kürzlich von Coster und Brons⁴⁾ verschiedene $^1\Sigma^-$, $^1\Pi^-$, $^3\Sigma^+$, $^3\Sigma^-$ und $^3\Pi$ -Terme als Störungsursachen dargelegt worden sind. Ferner bespricht Watson die Versuchsdaten an Hand der Kronigschen Zeeman-Effektformel⁵⁾ [für Bandenzustände dem Hundschen Falle a) zugeschrieben].

Magnetische Term-aufspaltung = $\Delta\nu_{\text{norm.}} \cdot \frac{A(A + 2\Sigma)M}{J(J + 1)}$. Die richtige Formel⁶⁾ enthält dagegen im Zähler den Faktor $(A + \Sigma)$ anstatt A . Zur Deutung der Zeeman-Effekte der gestörten Bandenlinien bestrebt sich

¹⁾ Siehe R. Schmid u. L. Gerö, ZS. f. Phys. **93**, 656, 1935. — ²⁾ F. H. Crawford, Phys. Rev. **33**, 341, 1929. — ³⁾ W. W. Watson, ebenda **42**, 509, 1932. — ⁴⁾ D. Coster u. F. Brons, Physica **1**, 634, 1934. — ⁵⁾ R. de L. Kronig, Band Spectra and Molecular Structure, S. 37. — ⁶⁾ Siehe z. B. W. Jevons, Band Spectra of Diatomic Molecules, S. 252 oder W. Weizel, Bandenspektren, S. 150.

die vorliegende Arbeit jene Term-aufspaltungsbilder der Triplettterme zu benutzen, die in einer früheren Mitteilung über den Zeeman-Effekt der dritten positiven CO-Banden¹⁾ angegeben worden sind. Betreffs Fig. 1 dieser Arbeit muß aber bemerkt werden, daß die oben angesetzten Symbole

$$J = \begin{cases} K+1 \\ K \\ K-1 \end{cases} \text{ eigentlich unter die } {}^3\Pi_a\text{-Reihe zu setzen wären, da im } {}^3\Pi_a \text{ die}$$

richtige Reihenfolge ${}^3\Pi_0$, ${}^3\Pi_1$ und ${}^3\Pi_2$ sei (wie es sich weiter aus dem Text selbst erklärt). Eine entsprechende Korrektur müsse auch in der Tabelle auf der S. 702 (l. c.) vorgenommen werden. Betreffend die experimentellen Beobachtungen von Watson muß noch hervorgehoben werden, daß seine Aufnahmen im Felde viel stärker exponiert zu sein scheinen (in der Reproduktion ist es sicherlich der Fall) als ohne Feld, was eine natürliche Folge des vertikalen Zusammendrückens der Entladung zwischen die Pole bei der Einschaltung des Magnetstromes ist. Das bringt aber das Herauskommen solcher „überzähliger“ oder zu höheren Rotationsquantenzahlen gehörender Linien mit sich, die ohne Feld bei gleichen Expositionszeiten nicht photographiert, also damals noch nicht eingeordnet werden konnten. Wir glauben, daß diese Erscheinung für einige, von Watson selbst als stark unsymmetrisch bezeichnete Dublette — deren Auftreten in der vorliegenden Singulett-Triplett-Mischung überhaupt nicht leicht zu deuten ist — verantwortlich sei.

Zur Darstellung des Einflusses des magnetischen Feldes auf die Störungsstellen des $A^1\Pi$ -Zustandes sind in den Fig. 1 und 2 nur die Ångström-Banden (0, 0) und (0, 1) einbezogen worden, da einerseits diese Banden am besten photographierbar sind und zweitens, da diese wenigstens je ein Muster der verschiedenen Störungen aufweisen. Fig. 1 und 2 wurden folgendermaßen gezeichnet: An Hand der Daten des ${}^1\Sigma$ -Anfangszustandes der Banden (siehe die Arbeit von Schmid und Gerö) wurde das Term-schema der oberen Zustände berechnet. Man subtrahierte nun von dem Werte der $F'(J)$ -Reihe die experimentell beobachteten Wellenzahlen der $R(J-1)$ -, $Q(J)$ - und $P(J+1)$ -Linien, wodurch das Schema der unteren Zustände erhalten wurde. Aus Daten entsprechender R - und P -Linien, die eigentlich identische Werte liefern sollten, wurde der Mittelwert gebildet. Man subtrahierte davon noch die Werte des Ausdrucks $F''(J) = B''(J+1/2)^2 - D''(J+1/2)^4$, was das Schema des „nicht-gestörten“ unteren Zustandes wiedergibt, wenn man für B'' und D'' die entsprechenden Daten der Arbeit

¹⁾ R. Schmid, ZS. f. Phys. **89**, 701, 1934.

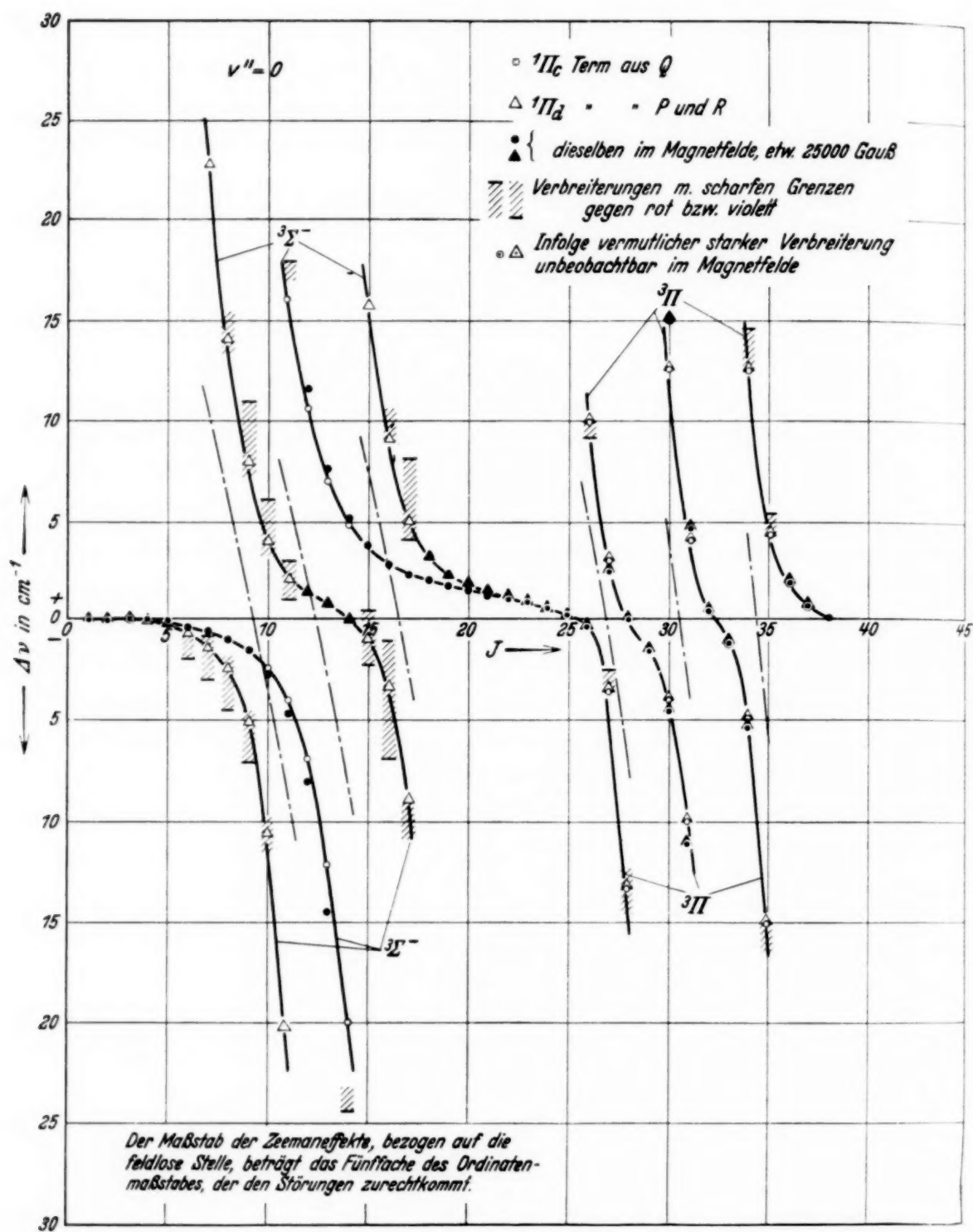


Fig. 1.

von Gerö¹⁾ einsetzt. Man bekommt in dieser Weise bis auf eine willkürliche Konstante die Abweichungen der gestörten von den ungestörten Termen. Der Wert der Konstante wurde so gewählt, daß diese Abweichungen bei

¹⁾ L. Gerö, ZS. f. Phys. **93**, 669, 1935.

solchen J Null ergeben sollen, wo — auf Grund der Zeichnungen der Geröschens Arbeit gut erkennbar — keine Störung stattfindet. Eine negative Ordinate der Fig. 1 und 2 zeigt an, um wieviel cm^{-1} -Einheiten Linien, die an entsprechenden Term endigen, infolge der Störung gegen Violett verschoben worden sind.

Wurde entsprechend eine Linie durch das Magnetfeld im Verhältnis zu der feldlosen Linie gegen Violett verschoben, so ist der Betrag der Verschiebung nach unten aufgetragen worden, aber in einem fünffach vergrößerten Maßstabe. Wurde eine Verbreiterung beobachtet, so wurde ein entsprechendes Feld schraffiert usw. Wenn eine Linie durch das Feld nicht beeinflußt erscheint, wurde das ursprüngliche Symbol (Hohlkreis bei Q - und Dreieck bei P - und R -Linien) durch einen ausgefüllten Kreis ersetzt. Es kam auch vor — besonders in der $^3\Sigma$ -Störung bei niedrigen J -Werten der $(0, 1)$ -Bande —, daß eine Linie, die im feldlosen Bilde verhältnismäßig noch nicht zu schwach erschien, durch das Feld unsichtbar gemacht wurde (höchstwahrscheinlich, weil die Plattenschwärzung infolge der vermuteten starken Verbreiterung viel zu klein blieb, um beobachtbar zu werden). In solchen Fällen wurde ein Punkt in die Mitte des Symbols eingesetzt.

Schon diese mehr qualitative Darstellung läßt einige Gesetzmäßigkeiten hervortreten. Man sieht vor allem, daß die Singulettstörungen bei $v' = 1$ keine Zeeman-Effekte aufweisen. Das ist zu erwarten, da im Falle von $^1\Sigma$ -Störungen neben den ursprünglichen $^1\Sigma \rightarrow ^1H$ -Übergängen nur noch solche zwischen $^1\Sigma$ -Zuständen vorkommen. Im Bereiche der 1H -Störung sind die zwei $^1\Sigma \rightarrow ^1H$ -Übergänge durchaus gleichgültig. [Bei niedrigen Werten der Rotationsquantenzahlen sind die regelrechten Zeeman-Effekte $^1\Sigma \rightarrow ^1H$ zu beobachten¹⁾. Die ausgefüllten Symbole in dieser Gegend wollen eben nur andeuten, daß hier keine Anomalien stattfinden.] An dieser Stelle muß bemerkt werden, daß neben den $^1\Sigma$ -Störungen, die von Coster und Brons aufgezeigt werden (in Banden mit $v'' = 1$ und $v'' = 3$), bei uns noch eine weitere, in der Herzberg-Bande $(0, 4)$ bei $J = 23$, ebenfalls nur im Q -Zweige (also auch $^1\Sigma^-$ wie die anderen) beobachtet wurde. Von dieser Störung wurde durch Coster und Brons nur die eine Q -Komponente — beobachtet in der $(0, 4)$ -Ängström-Bande — angegeben und die Störung als solche nicht erkannt, während unsere Aufnahmen (mit und ohne Feld an demselben Orte) auch die gleichstarke andere Komponente sehr klar aufweisen.

¹⁾ Siehe E. C. Kemble, R. S. Mulliken und F. H. Crawford, Phys. Rev. **30**, 438, 1927.

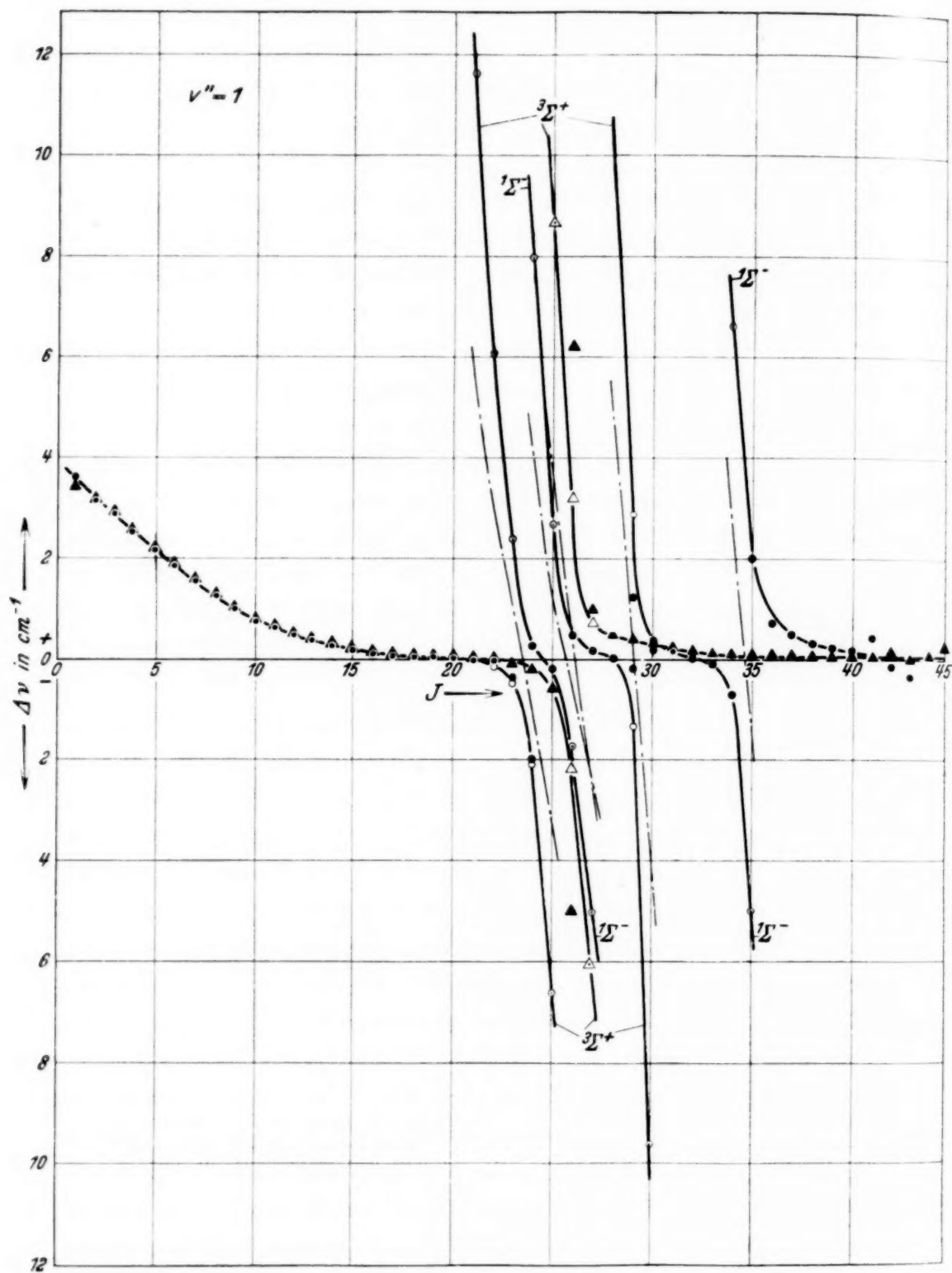


Fig. 2.

Die Mehrzahl der Verschiebungen, die infolge des Magnetfeldes auftreten, wirkt in dem Sinne, daß die Störungen selbst, d. h. die meisten Linien, die wegen der Störung nach z. B. Violett verschoben worden sind,

sich im Magnetfelde noch mehr in dieser Richtung verlagern. Nur in den Einzelfällen (im $^3\Pi$ bei $v'' = 0$ und im $^3\Sigma^+$ bei $v'' = 1$) begegnet man magnetischen Verschiebungen, die die schon feldlos vorhandenen Störungen aufzuheben bestrebt sind. Was die absolute Größe der magnetischen Verschiebungen, als Funktion der Feldstärke betrifft, kann man sagen, daß diese keinesfalls proportional, dagegen höchstwahrscheinlich quadratisch mit der Feldstärke wachsen. Eine genaue, zahlenmäßige Gesetzmäßigkeit kann hier, wo — infolge der Breite (und unsymmetrischen Schwärzung innerhalb) der Verschiebungen — die am Komparator ablesbaren Abstände mehr oder minder undefiniert sind, wohl nicht erwartet werden.

Versucht man eine Deutung der beobachteten Effekte an Hand der theoretischen Vorhersage für $^1\Sigma \rightarrow ^3\Sigma$ - und $^1\Sigma \rightarrow ^3\Pi$ -Übergänge, so ergibt sich, daß die inneren Triplettkomponenten am wenigsten an Schärfe (unter dem Einfluß des Feldes) gelitten haben, eine Beobachtung, die mit allen Tripletzuständen Fall a) oder b) verträglich ist. Ferner ist festzustellen, daß auch Verbreiterungen vom Betrage des zwei- bis vierfachen von $\Delta\nu_{\text{norm.}}$, wie es bei den äußeren Komponenten eines Tripletzustandes im Falle b) zu erwarten wäre, hier nirgends vorkommen. Auch ist keine Triplettaufspaltung zu beobachten, welche als Paschen-Back-Effekt zu deuten wäre (siehe Schmid l. c.). Ein Merkmal des zerstörenden Einflusses des Feldes auf die feldlose Tripletstruktur könnte vielleicht bei den äußeren Komponenten vermutet werden, wo die magnetischen Verschiebungen entgegen den Störungsverschiebungen gerichtet sind. — Im Zustand $v'' = 4$ liegt der Fall vor, daß die Tripletstörung bei den allerersten J -Werten stattfindet. Leider ist das Kopfgebiet der Herzberg-Bande (0, 4) zu stark überlagert, um eine genaue Untersuchung des Einflusses der Störung auf den regelrechten Zeeman-Effekt vornehmen zu können. Die 6100 Å-(0, 4)-Ängström-Bande liegt in einem günstigeren Spektralbereich, unglücklicherweise aber wurde sie bisher noch nicht auf den Zeeman-Effekt untersucht.

II. Zur Beurteilung der Daten der störenden Terme auf Grund einiger bisner bekannter Angaben wurde Tabelle 1 zusammengestellt. In der zweiten Vertikalreihe befinden sich die vermutlichen Störungsursachen. Zur Vertikalreihe I. und II. soll folgendes bemerkt werden.

In der Fig. 3 soll das Schneiden zweier Terme, T_1 und T_2 , dargestellt werden. Dabei sei: $T_1 = C + B_1 J(J+1)$ und $T_2 = B_2 J(J+1)$. Es soll näherungsweise angenommen werden, daß der arithmetische Mittelwert

$$\bar{T} = \frac{T_1 + T_2}{2} = \frac{C}{2} + \frac{B_1 + B_2}{2} J(J+1)$$

durch den Schnittpunkt geht und daß \bar{T} nicht nur in dem ungestörten Bereiche, sondern auch in der Nähe des Schnittpunktes selbst symmetrisch zwischen den gestörten Termen gelegen bleibt. [Für das

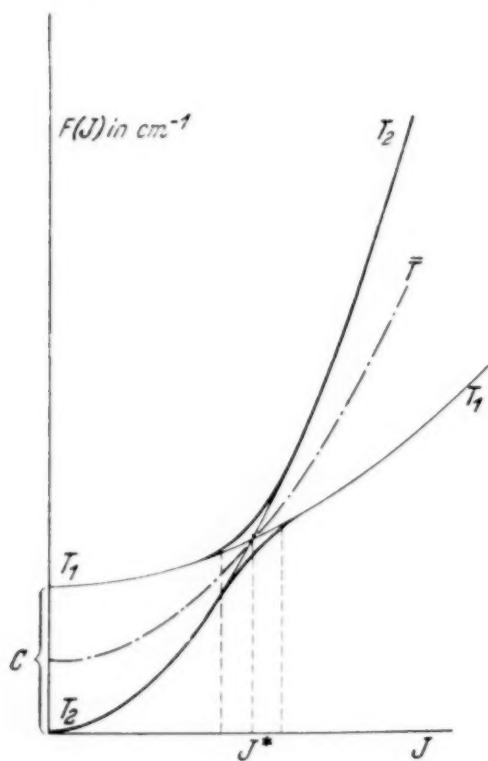


Fig. 3.

Schneiden von Termen mit sehr ungleicher Natur (Multiplizität, Symmetrie usw.) wohl eine sehr rohe Approximation.] Verfügt man über eine genügende Anzahl von Paaren der übereinander liegenden Termwerte, so kann der Mittelwert und daraus wiederum — bei Kenntnis z. B. des T_2 -Zustandes — der störende Zustand T_1 bzw. dessen Konstanten berechnet werden. In den Fig. 1 und 2 — deren Koordinatensystem aus der Fig. 3 durch eine einfache Subtraktion von $T_2 = B_2 J(J+1)$ zu gewinnen ist — sind die Kurven, die durch die Mittelpunkte zusammengehöriger Termwerte hindurchgehen, strichpunktiert ausgezogen. Die Schnittpunkte dieser Kurven mit

der Abszissenachse geben die J -Werte der Störungsstellen — Vertikalreihe I in der Tabelle 1 — an. Die Gleichung der \bar{T} -Kurve in diesem Koordinatensystem lautet:

$$\bar{T} = \frac{C}{2} + \frac{B_1 - B_2}{2} J(J+1).$$

Die Neigungen der \bar{T} -Kurven in den Schnittpunkten ($J = J^*$) sind durch $(B_1 - B_2)(J^* + 1/2)$ gegeben. Fig. 1 und 2 zeigen, daß diese Neigungen durchweg negativ sind. Die Werte dieser befinden sich in der Vertikalreihe II in der Tabelle 1. Da B_2 gleich B'' der Ängström-Banden bekannt ist, können aus den Werten der Spalten I und II die B_1 -Konstanten der störenden Terme berechnet werden (Spalte V). — Eine andere Methode, die ebenfalls diesem Zweck zustrebt, ist die folgende: Die Ordinaten der Figuren in der Geröschens Arbeit geben die $(B' - B'')$ -Werte der entsprechenden Banden an (siehe den Text a. a. O.). In störungsfreien Bereichen verlaufen die Kurven horizontal, wo aber Störungen stattfinden, bekommt man einen steigenden und einen sinkenden Zweig, den negativen bzw. posi-

Tabelle 1.

Bande	Störender Term	I	II	III	IV	V	VI
$0 \rightarrow 0$	$^3\Sigma^-$	9,35	- 4,93	9,65	0,580	1,100	1,136
	$^3\Sigma^-$	12,45	- 4,55	12,65	0,515	1,249	1,266
	$^3\Sigma^-$	16,55	- 4,61	16,75	0,483	1,330	1,330
	$^3\Pi$	26,90	- 5,74	27,35	0,440	1,391	1,416
	$^3\Pi$	30,60	- 7,32	(31,25)	(0,459)	1,365	1,378
	$^3\Pi$	34,40	- 9,04	(34,90)	(0,473)	1,341	1,350
$0 \rightarrow 1$	$^3\Sigma^+$	23,50	- 2,32	24,05	0,409	1,480	1,500
	$^1\Sigma^-$	25,70	- 2,28	26,00	0,403	1,491	1,512
	$^3\Sigma^+$	26,15	- 3,38	26,75	0,428	1,451	1,462
	$^3\Sigma^+$	29,10	- 4,86	29,50	0,448	1,411	1,422
	$^1\Sigma^-$	34,70	- 3,95	35,10	0,431	1,465	1,456

tiven Kurventeilen der Fig. 1 und 2 der vorliegenden Arbeit entsprechend. Jeder Punkt dieser auf- bzw. absteigenden Kurven, die den Wert von $\frac{Q(J) - Q(J-1)}{2}$ als Funktion von J aufgetragen darstellen, gibt den Wert von $(B' - B'')$ eigentlich nicht bei J , sondern zwischen $(J-1)$ und J , also bei $(J - \frac{1}{2})$ an. Es ist zu erwarten, daß, wenn man die auf- und absteigenden Zweige lange genug verfolgen könnte, diese beide einer anderen ebenfalls horizontalen Geraden sich nähern müßten, deren Höhe durch den Wert von $(B' - B'')$ definiert sein würde, für welchen an der Stelle von B'' die Rotationskonstante nicht des gestörten A^{111} -Zustandes, sondern die des störenden Terms eingesetzt werden müßte. Wiederum kann man die Annahme machen, daß — wenn die Natur (Symmetrie, Multiplizität usw.) der sich schneidenden Terme nicht allzusehr verschieden ist — sich der Schnittpunkt der auf- und absteigenden $(B' - B'')$ -Kurven im gleichen Abstand von den horizontalen Geraden, die den störungs-erleidenden bzw. störenden Termen zukommen, befinde. Die Abszisse des Schnittpunktes — nach Subtraktion von $\frac{1}{2}$ — liefert also den $J = J^*$ -Wert des Termschnittpunktes. Die Ordinate, vermindert um die Höhe der horizontalen Gerade, die dem gestörten Terme entspricht, gibt den halben Wert des Unterschiedes der Rotationskonstanten der gestörten und störenden Terme an, woraus sich wieder — da erstere bekannt ist — die Rotationskonstante des störenden Terms berechnen läßt. Die Vertikalreihe III der Tabelle 1 enthält die Abszissen, IV die Ordinaten der Schnittpunkte der Kurven aus der Arbeit von Gerö. Man sieht, daß die Zahlen in III durchweg um ungefähr eine halbe Einheit höher als die in I sind. Vertikalreihe V stellt die Werte der Rotationskonstanten der störenden Terme, berechnet aus I und II und Reihe VI dieselben aus IV berechnet dar. Man sieht,

daß die Ergebnisse der beiden Methoden keine allzusehr divergierenden Resultate liefern. (Bei den zwei letzten 3H -Störungen der $(0, 0)$ -Bande mußte der Schnittpunkt durch Extrapolation ermittelt werden.)

Die Realität dieser Rotationskonstanten hängt davon ab, inwieweit die hierfür zugrunde gelegte Annahme: die gleiche Natur der störenden und gestörten Terme, oder mit anderen Worten, die Symmetrie des Störungsvorgangs um den Termschnittpunkt für den vorliegenden Fall, zutrifft. Da der gestörte Zustand ein 1H ist, wird man dies am wenigsten für die äußeren $^3\Sigma$ -Komponenten erwarten können. Tatsächlich differieren diese B -Werte am meisten voneinander, obwohl ihr arithmetischer Mittelwert vom B -Wert der mittleren Komponente nicht allzusehr abweicht.

Die Rotationskonstanten der drei Triplettkomponenten sollten eigentlich nicht voneinander abweichen. Diese Forderung läßt eine weitere Methode zur Bestimmung der B -Werte der störenden Triplettterme zu, die auch von Coster und Brons (l. c.) angewendet wurde. Das Verfahren benutzt die J -Werte der drei Überschneidungen — Coster und Brons gebrauchen noch ganzzahlige J -Werte — und die drei Termhöhedifferenzen, die den Überschneidungspunkten entsprechen. Diese Methode ist definitionsgemäß nur bei Multiplett- Σ -Störungen brauchbar¹⁾, bewährt sich aber meistens auch dann, wenn — mangels genügender Daten, z. B. im vorliegenden Falle für die Störungen in den weiteren $(0, 2)$ -, $(0, 3)$ - usw. -Banden — die oben angegebenen Neigungs- bzw. Schnittpunktverfahren unanwendbar sind. Coster und Brons geben für die Rotationskonstanten der vorliegenden zwei störenden Terme

$$^3\Sigma^- \dots B = 1,24 \quad \text{und} \quad ^3\Sigma^+ \dots B = 1,18$$

an, wogegen auf Grund der Tabelle 1 als Mittelwerte

$$^3\Sigma^- \dots B = 1,235 \quad \text{und} \quad ^3\Sigma^+ \dots B = 1,454$$

erhalten werden.

Die Brauchbarkeit der verschiedenen Methoden müßte eigentlich an einem Beispiel geprüft werden, wo der störende Term aus einer wirklichen Rotationsanalyse selbst bekannt ist und wo die Natur der sich gegenseitig störenden Terme ähnlich, dabei der störende Term selbst ein Multiplett Σ ist. Diesen Forderungen kommt vielleicht am meisten die $^2\Sigma \sim ^2H$ -Störung im Bandenspektrum des CO^+ nahe²⁾. Die Störung, die in der $(8, 0)$

¹⁾ Siehe jedoch D. Coster, F. Brons u. A. van der Ziel, ZS. f. Phys. **84**, 304, 1933. — ²⁾ D. Coster, H. H. Brons u. H. Bulthuis, ebenda **79**, 787, 1932; H. Bulthuis, Dissertation, Groningen 1934.

$^2H_{1/2} \rightarrow ^2\Sigma$ -Bande zu beobachten ist, liefert folgende Werte der Rotationskonstante des störenden $^2\Sigma$ ($v = 14$)-Terms:

B	$^2\Sigma$ -Dublettkomponente		Mittelwert
	$J = K + 1/2$	$J = K - 1/2$	
Aus den Neigungen der Mittelwertskurven	1,675	1,747	1,711
Aus den Schnittpunkten der ($B' - B''$)-Kurven	1,656	1,752	1,704
Aus den Termhöhen der Überschneidungspunkte			1,701
Extrapoliert aus der Bandenanalyse ($v = 0$ bis 4)			1,67

Man sieht, daß die extremsten Werte noch innerhalb der Fehlergrenze von 5% bleiben.

Tabelle 2.

Gestörter Term $A^{11}H(v)$		Störender Term	J^*	$G + F(J^*)$	B
v	B				
0	1,6001	$^3\Sigma^-$	9,25	152	$\rangle 1,24$
		$^3\Sigma^-$	12,30	262	
		$^3\Sigma^-$	16,40	457	
		3H	26,85	1198	$\rangle 1,37$
		3H	30,70	1554	
		3H	34,40	1946	
1	1,5775	1H	(0)	(1480)	—
		$^3\Sigma^+$	23,55	2392	$\rangle 1,50$
		$^1\Sigma^-$	25,60	2556	
		$^3\Sigma^+$	26,20	2605	
		$^3\Sigma^+$	29,05	2858	$\rangle 1,17$
		$^1\Sigma^-$	34,65	3428	1,46
2	1,5550	$^3\Sigma^-$	25,15	3952	$\rangle 1,22$
		$^3\Sigma^-$	28,40	4227	
		$^3\Sigma^-$	32,20	4591	
3	1,5324	$^3\Sigma^+$	28,00	5585	$\rangle 1,13$
		$^3\Sigma^+$	30,65	5827	
		$^3\Sigma^+$	33,50	6111	
		$^1\Sigma^-?$	(38)	(6610)	—
4	1,5099	$^3\Sigma^+$	(0)	(5720)	—
		$^1\Sigma^-$	22,95	6550	—
		$^3\Sigma^-$	33,75	7489	$\rangle 1,18$
		$^3\Sigma^-$	37,10	7851	
		$^3\Sigma^-$			
7	1,4324	$^3\Sigma^-$	25,8	11 644	$\rangle 1,14$
		$^3\Sigma^-$	29,3	11 926	
		$^3\Sigma^-$			

Zum Schluß wurden noch die zur Zeit wahrscheinlichsten Daten der verschiedenen Störungen des $A^1\Pi$ -Zustandes in der Tabelle 2 zusammengestellt. In der ersten Vertikalreihe sind die gestörten $A^1\Pi$ -Zustände angegeben, in der zweiten die vermutlichen Störungsursachen. Die Spalte $G + F(J^*)$ stellt die Lage des gestörten $A^1\Pi$ -Terms — von der Nullstelle der (0, 0)-Ängström-Bande gerechnet — dar. Unter J^* sind die Werte der Rotationsquantenzahlen aufgeführt, bei welchen die Kreuzung stattzufinden scheint. In der letzten Vertikalreihe sind die wahrscheinlichen Rotationskonstanten der störenden Terme angegeben.

Die experimentelle Grundlage der vorliegenden Arbeit bilden die Spektralaufnahmen, die im Ryerson Physical Laboratory, University of Chicago, unter der Leitung von Herrn Prof. Robert S. Mulliken gewonnen worden sind. Die weitere Auswertung erfolgte im Physikalischen Institut der Königl. Ungarischen Universität für technische und Wirtschaftswissenschaften, das einen Teil seiner Ausrüstung dem Naturwissenschaftlichen Forschungsfonds und der Széchenyi-Gesellschaft verdankt und unter der Leitung des Herrn Prof. B. Pogány steht.

(Aus dem Forschungsinstitut der AEG.)

Zur Entstehung von Protonen bei der Beschießung von Palladium mit Elektronen.

Von R. Kollath in Berlin-Reinickendorf.

Mit 7 Abbildungen. (Eingegangen am 20. Februar 1935.)

Die Eigenschaft von wasserstoffbeladenem Palladium, bei Elektronenbombardement Protonen abzugeben, wurde bereits von Sugiura zur Herstellung von Protonenstrahlen verwendet, ohne daß jedoch der Vorgang der Protonenentstehung geklärt war. In der vorliegenden Arbeit werden experimentell die in dieser Methode steckenden Möglichkeiten zur Herstellung intensiver Strahlen langsamer Protonen genauer untersucht. Auf Grund der gefundenen Eigenschaften wird dann ein qualitatives Bild vom Mechanismus der Protonenentstehung entworfen.

Versuche, durch Elektronenbeschießung von wasserstoffbeladenen Palladiumoberflächen Protonenstrahlen herzustellen, werden von Goldmann¹⁾ auf der Suche nach einer brauchbaren Protonenquelle erwähnt. Gleichzeitig hat unabhängig davon Sugiura²⁾ diese Methode bei Beugungsuntersuchungen praktisch angewendet, ohne den eigentlichen Mechanismus der Protonenentstehung untersucht zu haben. Um die in dieser Methode enthaltenen Möglichkeiten zur Herstellung intensiver und homogener Strahlen von langsamen Protonen zu prüfen, werden die Entstehungsbedingungen der Protonen in Abhängigkeit von verschiedenen Variablen im folgenden genauer untersucht.

I. Vorversuche.

Die ersten orientierenden Versuche wurden mit einer ähnlichen Anordnung durchgeführt, wie sie Sugiura benutzt hat, das Prinzip einer solchen Anordnung ist in Fig. 1 schematisch wiedergegeben. Ein an einem Ende zugeschmolzenes Palladiumröhrchen *Pd* (wie es gewöhnlich zum Einlassen von Wasserstoff in Vakuumapparaturen benutzt wird) wurde am zugeschmolzenen Ende solange abgefeilt, bis nur noch eine einige Zehntel

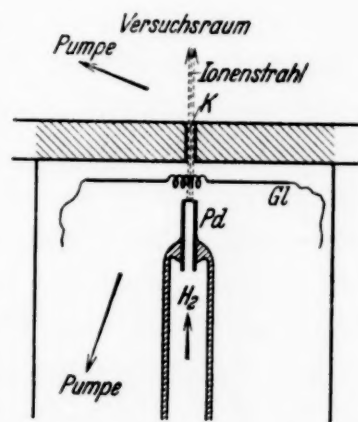


Fig. 1. Prinzip der Herstellung eines Protonenstrahls bei der „Palladiummethode“.

¹⁾ F. Goldmann, Ann. d. Phys. **10**, 460, 1931. — ²⁾ Y. Sugiura, Sci. Pap. Inst. Phys. Chem. Res. Japan **16**, 29–40, 1931, Nr. 310.

Millimeter dünne Pd-Stirnfläche stehenblieb, die den Innenraum des Röhrchens, der mit einem H_2 -Vorratsgefäß in Verbindung stand, vom Außenraum luftdicht trennte. Der Stirnfläche gegenüber in einigen Millimeter Abstand stand ein Glühdraht *Gl* (thor. W-Draht 0,15 mm Durchmesser) und in einigen weiteren Millimeter Abstand eine Blende *K*; letztere war als Kanal ausgebildet, um den darüberliegenden Versuchsraum nach Möglichkeit von Wasserstoff frei zu halten. Der Wasserstoff diffundiert bei Erwärmung des Pd infolge Heizung des Glühdrahtes und Elektronenbombardement aus dem Innenraum des Pd-Röhrchens in den Glühdrahtraum. Eine Pumpe steht mit dem Glühdrahtraum in direkter Verbindung, während der Versuchsraum durch eine besondere Pumpe evakuiert wird. Bei Anlegung geeigneter Spannungen tritt dann durch die Kanalblende ein Ionenstrahl hindurch, der hauptsächlich aus Protonen und H_2^+ -Ionen besteht. Wie sich in diesen Vorversuchen jedoch bald zeigte, waren die Palladiumröhrchen in ihren Wandstärken schwer kontrollierbar und in ihren Eigenschaften nicht genügend reproduzierbar, außerdem aber war die Erwärmung des Pd, die durch den Glühdraht besorgt wurde, mit Glühdrahtheizung und Elektronenbeschleunigung eng gekoppelt, so daß eine gesonderte Untersuchung des Einflusses der verschiedenen Komponenten nicht möglich war.

II. Versuchsanordnung.

Die endgültigen Versuche wurden daher mit der in Fig. 2 maßstäblich skizzierten Anordnung durchgeführt, die gegenüber der unter I. wiedergegebenen einfachen Anordnung gewisse Vorteile bietet:

Auf einem kleinen Folienträger aus Kupfer mit einer Öffnung von 3 mm Durchmesser an der oberen Stirnfläche ist als Verschluß dieser Durchbohrung eine Palladiumfolie von 0,1, in manchen Versuchen auch 0,05 mm Dicke hart aufgelötet, wodurch eine durchlässige Palladiumfläche von definierter Fläche und Dicke geschaffen ist. Im Innern des Folienträgers ist eine besondere Heizung für diesen und damit auch für die Pd-Folie angebracht (Glühspirale), wodurch weitgehende Unabhängigkeit von der Erwärmung durch den Glühdraht erreicht wird. Ein Thermoelement, dessen Drähte in unmittelbarer Nähe der Pd-Folie am Folienträger angebracht sind, gestattet eine Kontrolle der Temperatur des Folienträgers und damit auch der Pd-Folie. Ein Führungsring aus hitzebeständigem Isolationsmaterial ermöglicht im Zusammenwirken mit einem weiter unten angebrachten Federrohr¹⁾ eine genaue Justierung der Pd-Folie, wodurch die Lage der

¹⁾ In Fig. 2 nicht eingetragen.

Einzelteile gegeneinander auch nach dem Auseinandernehmen und Wiederausammensetzen der Apparatur reproduziert werden kann.

Von den übrigen in Fig. 2 skizzierten Apparaturteilen sei noch erwähnt: Der Folienträger ist direkt an eine Hartglasröhre angeschmolzen; es konnten so Temperaturen des Folienträgers bis zu 500°C verwendet werden. Um den Innenteil ist ein wassergekühltes Cu-Rohr herumgelegt, das die Kittung der äußeren Glasröhre gegen Erwärmung schützt. Die Glasröhre

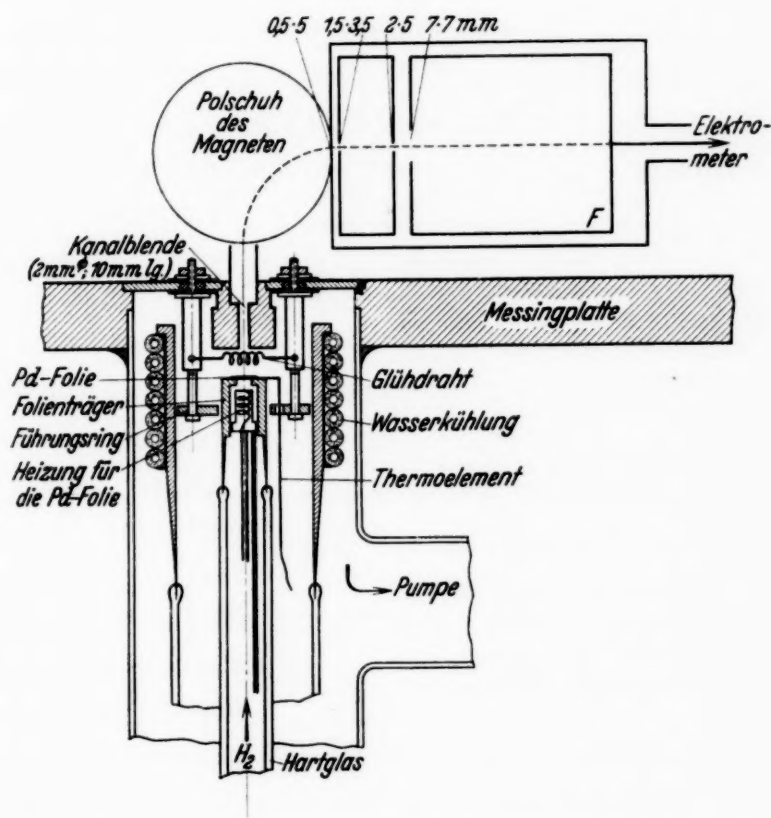


Fig. 2. Maßstäbliche Skizze der schließlich benutzten Versuchsanordnung.

mit den bisher beschriebenen Apparaturteilen ist in eine Messingplatte eingekittet. Auf dieser Messingplatte befindet sich unter einer durch Fett gedichteten Glasglocke ein Hufeisenelektromagnet mit einem 5 mm breiten Luftspalt, in welchem die nach oben in den Versuchsraum eintretenden Wasserstoffionen nach ihren Massen getrennt werden, und ferner hinter einigen Blenden ein Faraday-Käfig F , verbunden mit einem Elektrometer, in welchem diejenigen Ionen aufgefangen und in ihrer Menge gemessen werden, die um 90° aus ihrer ursprünglichen Strahlrichtung abgelenkt worden sind.

Das Elektrometer ist im allgemeinen zwecks bequemerer Messung über einen hochohmigen Widerstand (von etwa $10^9 \Omega$) geerdet. Der Magnet

ist von der Messingplatte isoliert, um die Ionen vor dem Eintritt in den Magneten nochmals beschleunigen zu können. Mittleren Versuchsbedingungen entsprechen z. B. die folgenden Spannungen:

Glühdraht gegen Pd-Folie (Elektronenbeschleunigung) auf . . — 100 Volt

Pd-Folie gegen Kanalblende (Ionenbeschleunigung) auf . . . + 120 „

Messingplatte gegen Magnet (Nachbeschleunigung d. Ionen) auf + 150 „

III. Meßergebnisse.

Wie sich schon bei den ersten Versuchen zeigte, hängt die relative Menge der entstehenden H_1^+ - und H_2^+ -Ionen gegeneinander von verschiedenen Größen stark ab. Es wurden daher zunächst die Be-

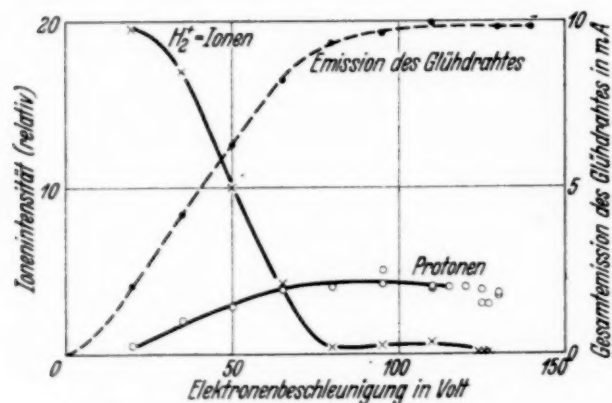


Fig. 3. Abhängigkeit der Intensität der H_1^+ - und der H_2^+ -Ionen von der Elektronenbeschleunigung.

dingungen untersucht, für welche die relative Protonenmenge möglichst groß ist (a). Die absolute Größe der erhaltenen Protonenströme und der Einfluß verschiedener Größen darauf wird im nächsten Abschnitt diskutiert (b). Schließlich wird die Energieverteilung der entstandenen Protonen genauer untersucht (c).

a) *Relative Menge der H_1^+ - und H_2^+ -Ionen gegeneinander.* Besonders wesentlich für die Steigerung des Verhältnisses von $H_1^+ : H_2^+$ zeigte sich die Erhöhung der Beschleunigung der vom Glühdraht ausgehenden Elektronen; ein Meßbeispiel hierfür ist in Fig. 3 wiedergegeben: Über der Elektronenbeschleunigung als Abszisse ist die Gesamtemission des Glühdrahtes (gestrichelte Linie und rechte Ordinatenteilung), sowie die im Faraday-Käfig F aufgefangene Protonenmenge (\circ — \circ) und H_2^+ -Ionenmenge (\times — \times) in relativem Maß (linke Ordinatenteilung) aufgetragen: Mit steigender Elektronenbeschleunigung steigt die Zahl der Protonen, während die Zahl der H_2^+ -Ionen stark absinkt. Das Verhältnis $H_1^+ : H_2^+$ steigt also mit wachsender Elektronenbeschleunigung außerordentlich an und erreicht schließlich einen über einen größeren Bereich konstanten Wert oberhalb 80 Volt Elektronenbeschleunigung. Diese Verschiebung des Verhältnisses beider Ionenarten zugunsten der Protonen ist aber wahrscheinlich nicht allein auf die Vergrößerung der Elektronenenergie zurückzuführen, sondern zu einem gewissen Teil auch auf

die Vergrößerung der Elektronenmenge. Das ist bereits dadurch angedeutet, daß oberhalb 80 Volt trotz steigender Elektronenbeschleunigung das Verhältnis $H_1^+ : H_2^+$ annähernd konstant bleibt, was mit der Konstanz der Glühemission parallel geht¹⁾. Darüber hinaus ergaben ferner Versuche unter sonst gleichen Verhältnissen mit größer werdendem Elektronensättigungsstrom ein stärker als proportionales Anwachsen der absoluten Protonenintensität (vgl. Abschnitt IIIb).

Auch die zwischen Kanalblende und Pd-Folie liegende Ionenbeschleunigung ist von wesentlichem Einfluß auf das Verhältnis von $H_1^+ : H_2^+$, wie Fig. 4 zeigt. Die Elektronenbeschleunigung wurde zu 95 Volt, die Elektronenemission zu etwa 10 mA gewählt (vgl. die Bedingungen in Fig. 3). Das Vorhandensein optimaler Entstehungsbedingungen für die H_1^+ - bzw. H_2^+ -Ionen bei etwa 20 bzw. 65 Volt Ionenbeschleunigung hängt wahrscheinlich mit dem Mechanismus der Ionenentstehung zusammen (vgl. Abschnitt IV dieser Arbeit), während der schließliche Intensitätsanstieg beider Ionenarten auf der Sammelwirkung des beschleunigenden Feldes beruht.

Im Gegensatz zu dem vorigen ist der Wasserstoffvordruck jenseits der Pd-Folie (vom Glühdraht aus gesehen) in einem weiten Bereich ohne wesentlichen Einfluß auf die relative Zahl der H_1^+ - und der H_2^+ -Ionen zueinander, wie Fig. 5 zeigt.

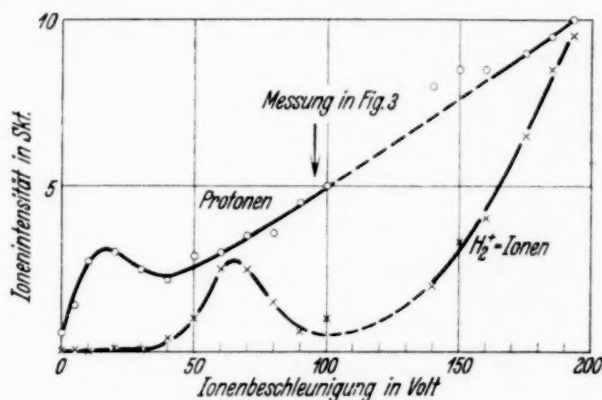


Fig. 4. Abhängigkeit der Intensität der H_1^+ - und der H_2^+ -Ionen von der Ionenbeschleunigung.
Elektronenbeschleunigung: 95 Volt.
Gesamtemission des Glühdrahts: 10 mA.

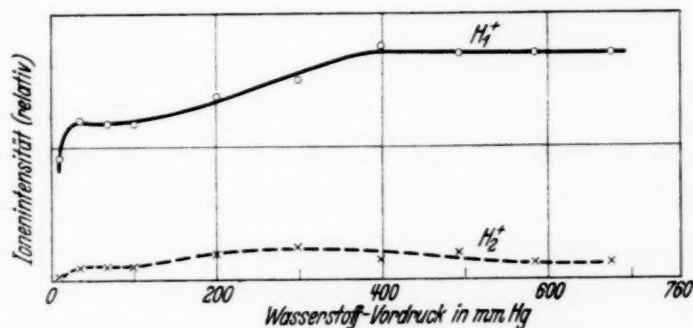


Fig. 5. Abhängigkeit der Intensität der H_1^+ - und H_2^+ -Ionen vom Wasserstoffdruck.

Elektronenbeschleunigung: 125 Volt.
Glühdraht-Gesamtemission: 8,3 mA.
Ionenbeschleunigung: 100 Volt.
Folienträgertemperatur: 285° C.

¹⁾ Allerdings könnte man hier wohl auch an Zusammenhänge mit dem Ionisierungsquerschnitt des Wasserstoffs gegenüber Elektronen denken.

Erwähnt sei an dieser Stelle auch noch ein gewisser Einfluß der Nachbeschleunigung der Ionen, die zwischen der Kanalblende und dem Magneten angelegt wird und in den bisher beschriebenen Versuchen meist 150 Volt betrug: Die absolute Ionenausbeute nimmt für beide Ionenarten schließlich mit steigender Nachbeschleunigung zu; dieser Intensitätsanstieg setzt für die H_2^+ -Ionen erst bei höherer Nachbeschleunigung ein als für die Protonen, wodurch ein Optimum des Verhältnisses von $H_1^+ : H_2^+$ bei etwa 100 Volt hervorgerufen wird. Da ein merklicher Durchgriff durch den Blendenkanal nicht in Frage kommt, kann es sich hierbei nur um sekundäre Erscheinungen handeln, z. B. Konzentrierungswirkungen, die mit dem eigentlichen Vorgang der Protonenentstehung nicht zusammenhängen.

b) *Absolutgröße der erhaltenen Protonenströme.* Die *Folientemperatur* spielt bis zu einigen Hundert $^{\circ}C$ nicht die Rolle, die man nach der starken Zunahme der H_2 -Durchlässigkeit mit steigender Temperatur erwarten würde. Dies hat seinen Grund wahrscheinlich darin, daß das Palladium auch bei Zimmertemperatur in den hier angestellten Versuchen weitgehend mit Wasserstoff gesättigt ist, weshalb auch eine merkliche Protonenemission schon unmittelbar nach Beginn der Elektronenbeschöpfung bei noch kalter Folie einsetzt. Immerhin steigt zwischen 400 und 500 $^{\circ}C$ die Protonenintensität recht merklich an (um etwa 30%), so daß weitere Temperaturerhöhung noch zu starker Intensitätssteigerung führen dürfte¹⁾.

Wie bereits unter a) ausgeführt, steigt ferner die absolute Protonenmenge mit Erhöhung des (gesättigten) Glühelctronenstromes stärker als proportional an. So wurde z. B. durch eine Erhöhung des Glühelctronenstromes von 7,5 auf 10 mA eine Erhöhung des Protonenstromes auf etwa das Doppelte erhalten. Die in den vorliegenden Versuchen bei Folientemperaturen bis zu 500 $^{\circ}C$ erhaltenen maximalen Protonenströme zum Faraday-Käfig betragen etwa 10^{-9} Amp. bei etwa 10 mA Elektronenstrom auf die Pd-Folie und bei einer Protonenenergie von etwa 220 Volt. Zwecks Erreichung größerer absoluter Protonenmengen müßte nach dem vorangegangenen die auf das Pd auftreffende Elektronenmenge und ferner die Temperatur des Palladiums möglichst gesteigert werden. Daß auf diesem Wege eine Vergrößerung des Protonenstromes um eine Zehnerpotenz leicht zu erreichen ist, zeigten orientierende Versuche mit der in den Vorversuchen beschriebenen einfacheren Anordnung, mit der durch entsprechende Maßnahmen 10^{-8} Amp. im Faraday-Käfig gemessen wurden: diese absolute

¹⁾ Bei höheren Palladiumtemperaturen muß für schnelles Abpumpen des Wasserstoffs im Glühdrahtraum gesorgt werden, weil sonst infolge von Entladungserscheinungen starke Intensitätsschwankungen auftreten.

Protonenmenge entspricht dem von Sugiura bei etwa gleicher „Strahlgeometrie“ erhaltenen gesamten Protonenstrom¹⁾.

c) *Energieverteilung und absolute Energie der Protonen.* Steigert man die Spulenstromstärke des Elektromagneten und mißt man gleichzeitig die Aufladung des Faraday-Käfigs im Elektrometer, so erhält man eine „magnetische Verteilungskurve“, die den ursprünglichen Ionenstrahl nicht nur in Einzelstrahlen nach den verschiedenen Massen²⁾ aufspaltet, sondern außerdem jeden dieser Einzelstrahlen, also z. B. den Protonenstrahl, noch nach den in ihm enthaltenen Protonengeschwindigkeiten zerlegt. Eine solche magnetische Verteilungskurve, wie sie schließlich unter Berücksichtigung der unter a) gefundenen Eigenschaften dieser Protonenquelle für möglichst große relative Protonenintensität optimal erhalten wurde, ist in Fig. 6 wiedergegeben.

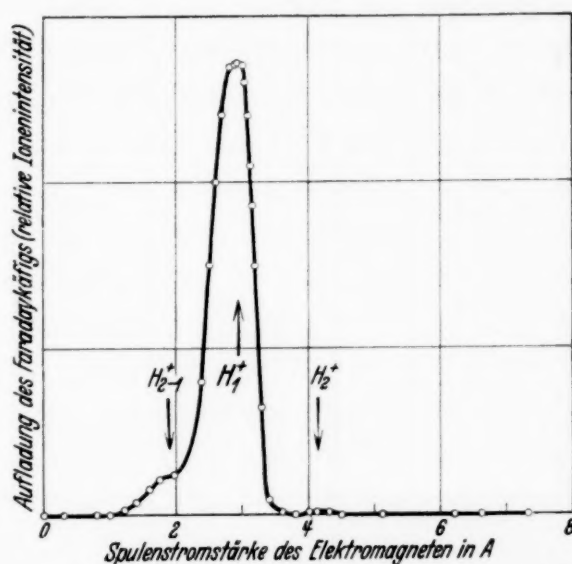


Fig. 6. Magnetische Verteilungskurve (Massen- bzw. Geschwindigkeitsspektrum) der bei der Pd-Methode entstehenden Ionen. (Bedingungen für Protonenentstehung besonders günstig.)

Neben dem großen Protonenmaximum bei etwa 2,9 Amp. ist bei etwa 4,2 Amp. ein H_2^+ -Maximum eben noch angedeutet; am Fuße des Protonenmaximums bei kleinerer Magnetfeldstärke ist ferner eine kleine Erhebung merkbar, die der Protonenkurve aufsitzt und von Ionen herrührt, die als H_2^+ beschleunigt wurden und kurz vor dem Durchlaufen des Magneten dissoziiert sind. Dieses Maximum wird üblicherweise mit H_{2-1}^+ bezeichnet³⁾.

Die Identifizierung des Hauptmaximums als Protonenmaximum ist bei bekannter Ionenenergie aus der Magnetspulenstromstärke und dem bekannten Radius der Ionenbahn möglich, liefert aber im allgemeinen wegen der Remanenzerscheinungen nur mit Hilfe direkter Ausmessungen der Magnetfeldstärke einwandfreie Ergebnisse. Im vorliegenden Fall wurde daher, um sicher zu gehen, der Magnet mit Hilfe von Protonen nach der Lithiummethode geeicht, bei der im wesentlichen nur Protonen von sehr scharf definierter Energie auftreten. In Fig. 7 ist zusammen mit der Verteilungskurve aus Fig. 6 eine Verteilungskurve eingetragen, wie sie

¹⁾ Y. Sugiura, l. c. vgl. speziell S. 32. — ²⁾ Genauer e/m -Werten. —

³⁾ Vgl. A. J. Dempster, Phil. Mag. 3. 115, 1927.

bei der Li-Methode unter sonst gleichen Bedingungen erhalten wurde (○—○). Beide Hauptmaxima sind zwecks besseren Vergleichs ihrer Lage und Form auf gleiche Höhe gebracht. Der Vergleich zeigt zunächst, daß das große Maximum der Fig. 6 als Protonenmaximum zu deuten ist. Andererseits weisen gegenüber dem nach der Li-Methode erhaltenen Maximum Breite und Verschiebung des Maximums der Fig. 6 auf andersartige Entstehungsbedingungen der Protonen in beiden Methoden hin.

Die direkte Messung der Protonenenergie mit Hilfe von sogenannten Gegenspannungskurven am Faraday-Käfig erbrachte die Bestätigung

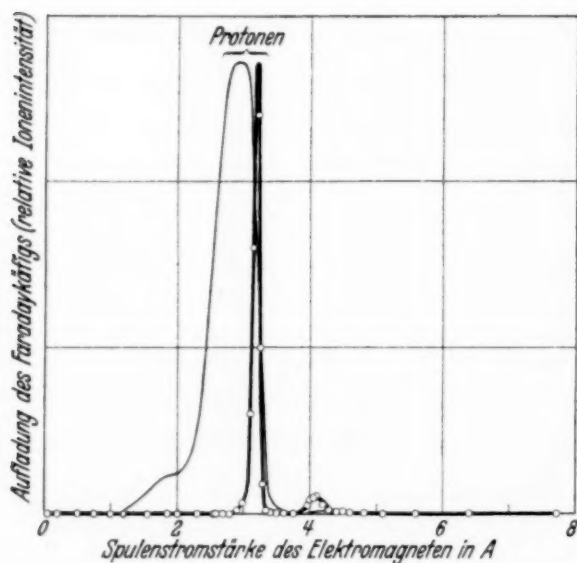


Fig. 7. Vergleich der magnetischen Verteilungskurven:
nach der „Palladiummethode“: — (Fig. 6).
nach der „Lithiummethode“: ○—○.

dafür, daß im Gegensatz zu den „Li-Protonen“, deren Energie genau der angelegten Spannung entspricht¹⁾, die „Pd-Protonen“ im Maximum ihrer Verteilungskurve tatsächlich eine kleinere Energie haben als sie nach den angelegten Spannungen haben müßten, falls sie von der Oberfläche des Pd ausgehen. Die Energiedifferenz entspricht, wie es sein muß, in ihrer Größe der Verschiebung der Maxima in Fig. 7. Energiebestimmungen aus

Gegenspannungskurven bei verschiedenen Protonen- und Elektronenbeschleunigungen ergaben ferner, daß die Differenz zwischen ihrer tatsächlichen Energie in Volt und der angelegten Ionenbeschleunigungsspannung mit letzterer ansteigt. So wurden z. B. gemessen:

Tabelle 1.

Ionenbeschleunigung	100 Volt	200 Volt
Differenz zwischen Ionenbeschleunigung und Protonenenergie	30 „	55 „
Elektronenbeschleunigung	130 „	100 „

Die bei diesen Versuchen verwendeten elektronenbeschleunigenden Spannungen sind in der letzten Zeile von Tabelle 1 mit aufgeführt, um zu

¹⁾ Vgl. C. Ramsauer, R. Kollath u. D. Lilienthal, Ann. d. Phys. 8, 705, 1931.

zeigen, daß ein Zusammenhang zwischen der in Zeile 2 der Tabelle aufgeführten Differenz und der Elektronenbeschleunigung nicht besteht, jedenfalls aber keine Proportionalität, wie Sugiura angibt¹⁾).

IV. Zum Mechanismus der Protonenentstehung bei der Palladiummethode.

Nach dem unter III. aufgezählten Versuchsmaterial, speziell nach der Energieverteilungskurve in Fig. 6 und den Energiemessungen aus Gegenspannungskurven können wir über den Vorgang der Protonenentstehung bei der Palladiummethode folgendes aussagen:

a) Die Protonen werden in ihrer großen Mehrzahl *nicht* an der Oberfläche des Pd oder in unmittelbarer Nähe derselben gebildet. Wäre dies nämlich der Fall, so müßte ihre Energie annähernd einheitlich sein und der Größe der angelegten Ionenbeschleunigungsspannung entsprechen; tatsächlich haben die entstehenden Protonen aber eine merklich kleinere Energie (Verschiebung des Maximums in Fig. 7).

Zur Deutung dieser Erscheinung könnte man vielleicht noch an die Möglichkeit denken, daß die Protonen doch von der Pd-Oberfläche ausgehen, aber verschieden starke Geschwindigkeitsverluste beim Durchgang durch den vor dem Pd befindlichen Wasserstoff erleiden. Nun ist in früheren Messungen über die Beeinflussung langsamer Protonen durch neutrale Gasmoleküle²⁾ gezeigt worden, daß langsame Protonen in H_2 zum Teil elastisch gestreut, zum Teil umgeladen werden, daß aber außer diesen beiden kein anderer Beeinflussungsvorgang, also auch kein *teilweiser* Geschwindigkeitsverlust, in merklicher Häufigkeit vorkommt. Man müßte demnach, um diese Möglichkeit der Protonenentstehung aufrecht zu erhalten, bereits kompliziertere Annahmen machen, z. B. aufeinander folgende Neutralisierung und Wiederionisierung. Gegenüber der oben entwickelten Vorstellung verliert damit die eben ausgeführte Überlegung stark an Wahrscheinlichkeit.

b) Der Entstehungsort der Protonen ist vielmehr offenbar im Raum zwischen Pd und Glühdraht zu suchen. Der durch die erwärmte Pd-Folie hindurch diffundierende Wasserstoff, der aus dem Glühdrahtraum abgepumpt

¹⁾ Sugiura war auf die Diskrepanz zwischen Ionenbeschleunigungsspannung und Protonengeschwindigkeit ebenfalls aufmerksam geworden; dies bringt er in seiner Unterscheidung zwischen „ V “ und „ V_{eff} “ zum Ausdruck. Er vermutete aber, daß die Differenz zwischen V und V_{eff} der halben Elektronenbeschleunigungsspannung gleich sei, was nach Tabelle 1 nicht der Fall sein kann. Da der Vorgang der Protonenentstehung für das Ziel seiner Arbeit belanglos war, hat er eingehendere Versuche zu dieser Frage nicht angestellt. — ²⁾ C. Ramsauer u. R. Kollath, Ann. d. Phys. **17**, 755, 1933.

bei der Li-Methode unter sonst gleichen Bedingungen erhalten wurde (○—○). Beide Hauptmaxima sind zwecks besseren Vergleichs ihrer Lage und Form auf gleiche Höhe gebracht. Der Vergleich zeigt zunächst, daß das große Maximum der Fig. 6 als Protonenmaximum zu deuten ist. Andererseits weisen gegenüber dem nach der Li-Methode erhaltenen Maximum Breite und Verschiebung des Maximums der Fig. 6 auf andersartige Entstehungsbedingungen der Protonen in beiden Methoden hin.

Die direkte Messung der Protonenenergie mit Hilfe von sogenannten Gegenspannungskurven am Faraday-Käfig erbrachte die Bestätigung dafür, daß im Gegensatz zu

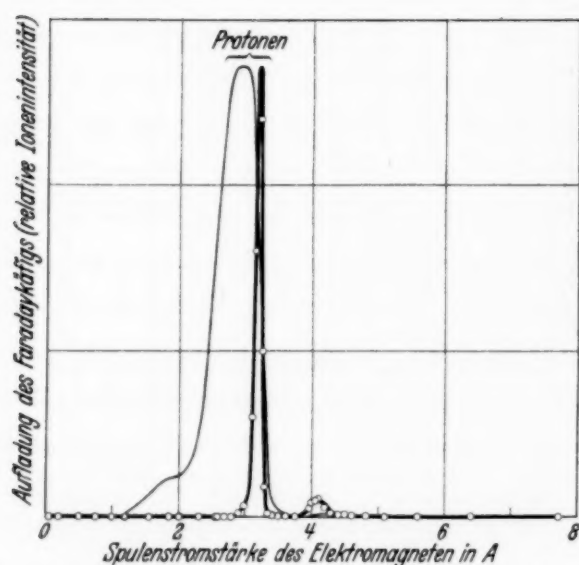


Fig. 7. Vergleich der magnetischen Verteilungskurven:
nach der „Palladiummethode“: — (Fig. 6).
nach der „Lithiummethode“: ○—○.

den „Li-Protonen“, deren Energie genau der angelegten Spannung entspricht¹⁾, die „Pd-Protonen“ im Maximum ihrer Verteilungskurve tatsächlich eine kleinere Energie haben als sie nach den angelegten Spannungen haben müßten, falls sie von der Oberfläche des Pd ausgehen. Die Energiedifferenz entspricht, wie es sein muß, in ihrer Größe der Verschiebung der Maxima in Fig. 7. Energiebestimmungen aus

Gegenspannungskurven bei verschiedenen Protonen- und Elektronenbeschleunigungen ergaben ferner, daß die Differenz zwischen ihrer tatsächlichen Energie in Volt und der angelegten Ionenbeschleunigungsspannung mit letzterer ansteigt. So wurden z. B. gemessen:

Tabelle 1.

Ionenbeschleunigung	100 Volt	200 Volt
Differenz zwischen Ionenbeschleunigung und Protonenenergie	30 "	55 "
Elektronenbeschleunigung	130 "	100 "

Die bei diesen Versuchen verwendeten elektronenbeschleunigenden Spannungen sind in der letzten Zeile von Tabelle 1 mit aufgeführt, um zu

¹⁾ Vgl. C. Ramsauer, R. Kollath u. D. Lilienthal, Ann. d. Phys. 8, 705, 1931.

zeigen, daß ein Zusammenhang zwischen der in Zeile 2 der Tabelle aufgeführten Differenz und der Elektronenbeschleunigung nicht besteht, jedenfalls aber keine Proportionalität, wie Sugiura angibt¹⁾.

IV. Zum Mechanismus der Protonenentstehung bei der Palladiummethode.

Nach dem unter III. aufgezählten Versuchsmaterial, speziell nach der Energieverteilungskurve in Fig. 6 und den Energiemessungen aus Gegenstandskurven können wir über den Vorgang der Protonenentstehung bei der Palladiummethode folgendes aussagen:

a) Die Protonen werden in ihrer großen Mehrzahl *nicht* an der Oberfläche des Pd oder in unmittelbarer Nähe derselben gebildet. Wäre dies nämlich der Fall, so müßte ihre Energie annähernd einheitlich sein und der Größe der angelegten Ionenbeschleunigungsspannung entsprechen; tatsächlich haben die entstehenden Protonen aber eine merklich kleinere Energie (Verschiebung des Maximums in Fig. 7).

Zur Deutung dieser Erscheinung könnte man vielleicht noch an die Möglichkeit denken, daß die Protonen doch von der Pd-Oberfläche ausgehen, aber verschieden starke Geschwindigkeitsverluste beim Durchgang durch den vor dem Pd befindlichen Wasserstoff erleiden. Nun ist in früheren Messungen über die Beeinflussung langsamer Protonen durch neutrale Gasmoleküle²⁾ gezeigt worden, daß langsame Protonen in H_2 zum Teil elastisch gestreut, zum Teil umgeladen werden, daß aber außer diesen beiden kein anderer Beeinflussungsvorgang, also auch kein *teilweiser* Geschwindigkeitsverlust, in merklicher Häufigkeit vorkommt. Man müßte demnach, um diese Möglichkeit der Protonenentstehung aufrecht zu erhalten, bereits kompliziertere Annahmen machen, z. B. aufeinander folgende Neutralisierung und Wiederionisierung. Gegenüber der oben entwickelten Vorstellung verliert damit die eben ausgeführte Überlegung stark an Wahrscheinlichkeit.

b) Der Entstehungsort der Protonen ist vielmehr offenbar im Raum zwischen Pd und Glühdraht zu suchen. Der durch die erwärmte Pd-Folie hindurch diffundierende Wasserstoff, der aus dem Glühdrahtraum abgepumpt

¹⁾ Sugiura war auf die Diskrepanz zwischen Ionenbeschleunigungsspannung und Protonengeschwindigkeit ebenfalls aufmerksam geworden; dies bringt er in seiner Unterscheidung zwischen „ V “ und „ V_{eff} “ zum Ausdruck. Er vermutete aber, daß die Differenz zwischen V und V_{eff} der halben Elektronenbeschleunigungsspannung gleich sei, was nach Tabelle 1 nicht der Fall sein kann. Da der Vorgang der Protonenentstehung für das Ziel seiner Arbeit belanglos war, hat er eingehendere Versuche zu dieser Frage nicht angestellt. — ²⁾ C. Ramsauer u. R. Kollath, Ann. d. Phys. **17**, 755, 1933.

wird, ergibt zwischen der Pd-Oberfläche und dem Glühdraht einen Raum von abnehmendem H_2 -Druck, in den die Elektronen vom Glühdraht hineinflaufen und dabei die H_2 -Moleküle ionisieren und dissoziieren. Die dabei entstehenden Ionen werden in dem Beschleunigungsfeld zunächst auf den Glühdraht und dann auf die Kanalblende zu beschleunigt. Die unter bestimmten Bedingungen (vgl. Abschnitt III) besonders große Ausbeute an Protonen ist vielleicht zum Teil dadurch bedingt, daß die entstehenden H_2^+ -Ionen in der Wasserstoffatmosphäre viel stärker umladen¹⁾ und damit häufiger durch Neutralisation aus dem Strahl ausscheiden als die Protonen.

Die Palladiummethode stellt also nicht eine in ihren Eigenschaften neue Methode zur Protonenerzeugung dar, sondern muß als eine spezielle (und für manche Zwecke günstigere) Form der „Elektronenstoßmethode“²⁾ bezeichnet werden; speziell insofern, als hier die Dichte der H_2 -Atmosphäre, in welche die Elektronen hineingeschossen werden, nicht räumlich konstant ist oder in der Elektronenstrahlrichtung abnimmt, sondern in der Flugrichtung der stoßenden Elektronen stark zunimmt.

Für die qualitative Richtigkeit dieses Bildes spricht auch die genauere Betrachtung der Energieverteilung in Fig. 6: Vorhanden sind sowohl Protonen, deren Energie der vollen angelegten Beschleunigungsspannung, als auch solche, deren Energie nur der Größe der Nachbeschleunigung der Ionen entspricht, die also nur mit ganz kleiner Energie in die Kanalblende eingetreten sind. Die größte Zahl der Protonen wird an einer Stelle zwischen Glühdraht und Pd entstehen, deren Lage durch das Zusammenwirken von Gasdichte, maximal vertretener Elektronengeschwindigkeit und von dem (Elektronenenergie-abhängigen) Ionisierungs- und Dissoziationsquerschnitt gegeben ist. Da der Abfall des H_2 -Druckes von der gesamten Anordnung und der Saugleistung der Pumpe abhängt, wird sich dieses Optimum der Protonenentstehung in seiner Lage bei verschiedenen Versuchsanordnungen an verschiedenen Stellen befinden, so daß quantitative Überlegungen

¹⁾ Vgl. H. Kallmann u. B. Rosen, ZS. f. Phys. **58**, 52, 1929 sowie auch die direkten Messungen des Wirkungsquerschnitts von Wasserstoff gegenüber H_1^+ - und H_2^+ -Ionen von R. Holzer, Phys. Rev. **36**, 1204, 1930. —

²⁾ Als „Elektronenstoßmethoden“ seien hier solche bezeichnet, bei denen durch Stoß von Elektronen eines Elektronenstrahls in einem Gasraum Ionen gebildet und durch Hilfsfelder herausgezogen werden, also z. B. die Anordnungen von Aich (ZS. f. Phys. **9**, 372, 1922), Goldmann (Ann. d. Phys. **10**, 460, 1931) und ähnliche. Im Gegensatz dazu stehen einerseits die „Gasentladungsmethoden“, bei denen die Ionen aus elektrischen Entladungen, z. B. aus einem Niedervoltbogen, durch Hilfsfelder herausgezogen werden, und andererseits Methoden, bei denen die Protonen an der Oberfläche eines Körpers gebildet werden, z. B. Glühanoden oder die „Lithiummethode“.

bei der ungenauen Kenntnis der Druckverhältnisse und auch wegen unserer Unkenntnis des Dissoziationsquerschnitts augenblicklich kaum Resultate versprechen, die in ihrer Genauigkeit über das hier gegebene qualitative Bild hinausgehen.

V. Zusammenfassung.

1. Die Bedingungen für die Entstehung von Protonenstrahlen bei der Beschießung von Palladium mit Elektronen werden mit einer für diesen Zweck entwickelten Anordnung experimentell untersucht.

2. *Meßergebnisse.* a) Die Protonenintensität ist in ihrer relativen Größe gegenüber der Intensität der gleichfalls entstehenden H_2^+ -Ionen stark abhängig von der Zahl und Geschwindigkeit der auf das Palladium auftreffenden Elektronen sowie von der die Protonen beschleunigenden Spannung, dagegen nicht wesentlich abhängig von dem Wasserstoffdruck auf der dem Glühdraht abgewandten Seite des Palladiums.

b) Die Protonenintensität läßt sich in ihrer absoluten Größe durch Erhöhung der Pd-Temperatur (hier bis $500^\circ C$ untersucht) und durch Erhöhung der auf das Pd auftreffenden Elektronenmenge wahrscheinlich über die hier erhaltenen Protonenströme (nach Durchlaufung des Magneten und Ausblendung etwa 10^{-8} Amp.) hinaus noch merklich steigern.

c) Die Protonenenergie ist nicht einheitlich und die maximal vertretene Protonenenergie entspricht nur etwa 70 bis 75% der angelegten beschleunigenden Spannung.

3. Aus den Meßergebnissen läßt sich in bezug auf den Mechanismus der Protonenentstehung schließen, daß die „Palladiummethode“ ihren Eigenschaften nach nicht zu denjenigen Methoden gehört, bei denen die entstehenden Protonen von einer festen Oberfläche ausgehen, sondern zu den sogenannten „Elektronenstoßmethoden“, bei denen die Protonen durch Elektronenstoß in einer Wasserstoffatmosphäre gebildet werden.

Über die Berechnung der Dampfdrucke wässriger Lösungen.

Von **L. Frank** in Kofu (Japan).

(Eingegangen am 30. Januar 1935.)

Dampfdrucke konzentrierter Lösungen werden berechnet mittels Dührings Regel und Gefrierpunkts- und Siedepunktsmessungen.

Bekanntlich gibt es keine Formeln für die Dampfdrucke wässriger Lösungen für höhere Salzkonzentrationen. Wie hier gezeigt wird, kann man diese aber recht genau berechnen, wenn man von der Dühringschen Regel (D) ausgeht. Hierin bedeuten:

$$t_1 - t_2 = k(\tau_1 - \tau_2) \quad (D)$$

t_1, t_2, τ_1, τ_2 bzw. die Temperaturen der Lösung bei dem Druck p_1 und p_2 sowie des Wassers bei dem Druck p_1 und p_2 und k eine Konstante. Diese Beziehung ist schon oft — mit mehr oder weniger Erfolg — auf reine Stoffe angewandt worden. Baker und Waite¹⁾ konnten aber zeigen, daß (D) recht genau für wässrige Lösungen bei allen Konzentrationen gilt. Sie prüften (D) besonders eingehend an CaCl_2 -Lösungen; jedoch scheinen sie keine theoretischen Folgerungen daraus gezogen zu haben; das soll im folgenden geschehen.

Man kann für (D) auch schreiben:

$$t_p = K + k\tau_p, \quad (1)$$

worin K und k nicht mehr von p oder t oder τ abhängen, aber noch Funktionen der Konzentration c (g Salz auf 100 g H_2O) sind. Gelingt es, zwei zusammengehörige Paare t und τ anzugeben, ohne direkte Dampfdruckmessung, so kann man — bei konstantem c — den Dampfdruck der Lösung für alle t berechnen.

Ein erstes Wertepaar t_g, τ_g erhält man aus Gefrierpunktsmessungen. Denn dann ist der Dampfdruck p der Lösung gleich dem des Eises p_0 . Dieser p_0 -Wert, den man aus Tafeln finden kann, entspricht also dem gesuchten τ_g des Wassers. Ein zweites Wertepaar erhält man aus Siedepunktsmessungen (für das gleiche c), denn wenn bei t_s der Druck p 760 mm ist, so ist das entsprechende $\tau_s = 100^\circ$.

Die folgenden Tabellen zeigen die so berechneten Werte für K, k und p ; die Übereinstimmung ist gut, da die Fehler meist bei 1% liegen. Größere Abweichungen kommen vor bei den Salzen von Schwermetallen und von schwachen Säuren bei höherer Temperatur; jedoch sind solche Salze dann etwas hydrolysiert, so daß c für t_g und t_s nicht gleich ist.

¹⁾ E. Baker u. H. Waite, Transact. Amer. Inst. Chem. Engineers **13**, [2] 223, 1922.

Alle Werte für p_0 und p_0 entnahm ich den Scheelschen Tafeln, ebenso die p -Werte der Lösungen (hauptsächlich nach Emden, dann nach Tammann) den Tabellen von Landolt-Börnstein-Roth-Scheel. Die p_0 -Werte unterhalb 1,3 mm berechnete ich (z. B. bei 30 g NaCl) nach den Formeln von Scheel und Heuse¹⁾: $\log p_0 = 23,58 - 5 \cdot \log T - 2933/T$. Die p -Werte der Lösungen sind angeführt für 5, 10 . . . , g , und darum bestimmte ich die t_g und t_s der Lösungen für diese c -Werte graphisch aus den Daten der entsprechenden Tafeln des Landolt-Börnstein-Roth-Scheel, was wohl kaum Fehler verursacht. Die in den Ergänzungsbänden gegebenen t_g und t_s sind vielleicht genauer, jedoch sind die Abweichungen so gering, daß sie für k und K wenig ausmachen.

Aus den nach (1) berechneten Werten kann man die p -Werte der Lösung mittels der nach $1/10$ Grad fortschreitenden Scheelschen p_0 -Tafeln sogleich ablesen. Natürlich könnte man sie auch finden, indem man in eine empirische Formel für p_0 des Wassers — innerhalb eines passenden Temperaturintervalls, z. B.: $\log p_0 = A + B\tau + C\tau^2$ — die Werte von (1) einsetzt, also: $\log p = A + \frac{B}{k}(t-K) + \frac{C}{k^2}(t-K)^2$; hieraus kann man dann Wärmeeffekte bei konstantem c berechnen. Schließlich kann man auch k und K explizite als Funktionen der Konzentration c anschreiben, indem man $\log p = \alpha + \beta c + \gamma c^2$ setzt. Aus den bekannten p - und c -Werten — jetzt für konstante Temperatur — kann man dann α , β , γ

			c	$-t_g$	$-\tau_g$	t_s	K	k
A	Na Cl	i	10	5,75	6,5	101,67	0,82	1,0085
		ii	20	12,5	14	104	1,82	1,0218
		iii	30	21,12	23,7	106,82	3,37	1,0345
B	K Cl	i	10	4,25	4,8	101,5	0,6	1,009
		ii	30	13,3	14,85	104,18	1,89	1,0229
C	Ca Cl ₂	i	10	6	7,77	101,3	1,72	0,9958
		ii	20	14	15,6	103,2	1,8	1,014
D	K Br	i	25	7	7,88	102	0,95	1,0105
		ii	35	9,73	10,9	103	1,4	1,016
		iii	45	12,4	14,9	105,4	2,9	1,025
E	Mg SO ₄	i	10	1,8	2,02	100,4	0,22	1,0018
		ii	25	4,78	5,4	101,85	0,69	1,0116
F	Cu SO ₄	i	15	1,6	1,8	100,35	0,2	1,0015
G	K J	i	15	3,05	3,41	100,88	0,38	1,005
H	Zn SO ₄	i	15	1,76	1,97	100,42	0,23	1,0019
		ii	25	2,95	3,3	100,725	0,325	1,004
I	Li Cl	i	8	9	10,1	102,3	1,3	1,01
J	C ₁₂ H ₂₂ O ₁₁	i	23	1,15	1,3	100,38	0,26	1,0012
		ii	37	2,18	2,4	100,68	0,23	1,0045
		iii	54	3,44	3,9	101,06	0,46	1,0014

¹⁾ K. Scheel, Verh. d. D. Phys. Ges. 5, 287, 1903; K. Scheel u. W. Heuse, Ann. d. Phys. (4) 29, 723, 1909.

	t^0	$p_{\text{beob.}}$	$p_{\text{ber.}}$		t^0	$p_{\text{beob.}}$	$p_{\text{ber.}}$
A i	15	12	12	iii	65	165	153
	20	16	17		80	310	292
	40	52	52		90	457	432
	50	87	87	E i	50	90	91
	90	493	495		70	230	230
ii	15	11	11		90	519	518
	20	15	15	ii	50	88	87
	30	28	27		70	224	220
	50	80	80		90	507	490
		457	456	F	15	13	13
iii	15	10	10		30	31	31
	30	25	26		50	91	91
	50	73	76		90	515	519
	90	417	429	G	30	31	31
B i	20	17	17		50	90	90
	50	89	88		70	228	226
	70	224	222		90	511	509
	90	503	498	H i	15	13	13
ii	15	11	11		50	91	91
	30	28	27		70	229	230
	50	80	80		90	504	518
	90	456	453	ii	15	12	12
C i	15	12	12		50	90	90
	30	30	29		70	225	228
	60	141	139		90	507	513
	90	498	499	I	40	51	50
ii	15	11	11		60	139	137
	50	82	82		80	330	326
	70	206	208		90	488	482
	90	463	469	J i	90	521	518
D i	65	177	174		90	516	511
	70	220	217		70	227	228
	90	492	489				
ii	65	170	168				
	80	321	318				
	90	475	471				

berechnen. Für NaCl genügt eine Formel mit zwei Konstanten ($\alpha = 1,114$ und $\beta = -0,00332$ bei 15^0), die auch Extrapolation nach höheren c -Werten bis zur Sättigung erlaubt. Eine solche Formel ergibt auch einfache Ausdrücke für die freie Energie der Lösungen und für die EMK von Konzentrationsketten.

Die vorstehenden Tabellen enthalten wohl alle Lösungen, deren t_g -, t_s - und p -Daten im Landolt-Börnstein-Roth-Scheel vollständig angegeben sind. Das Schrifttum liefert noch viel mehr, jedoch sind vor allem die t_s -Werte nicht so sicher wie die des Tabellenwerkes.

Über die Einsteinschen Gravitationsgleichungen.

Von J. Ghosh in Calcutta.

(Eingegangen am 21. Januar 1935.)

Verfasser versucht, die Gültigkeit der Gleichung $K_{pq} - \frac{1}{4} g_{pq} K = -8\pi T_{pq}$ für gewisse Klassen von Problemen nachzuweisen.

1. Wenn wir annehmen, daß die Metrik des radialsymmetrischen Feldes

$$ds^2 = -e^\lambda dr^2 - r^2 d\Theta^2 - r^2 \sin^2 \Theta d\varphi^2 + e^\nu dt^2, \quad (1)$$

ist, so nehmen die Gleichungen

$$K_{pq} - \frac{1}{4} g_{pq} K = -8\pi T_{pq} \quad (2)$$

die Formen

$$8\pi T_1^1 = \frac{1}{2} e^{-\lambda} \left\{ \frac{1}{2} v'' - \frac{1}{4} \lambda' v' + \frac{1}{4} v'^2 - \frac{\lambda' + v'}{r} - \frac{1 - e^\lambda}{r^2} \right\}, \quad (3)$$

$$8\pi T_2^2 = -\frac{1}{2} e^{-\lambda} \left\{ \frac{1}{2} v'' - \frac{1}{4} \lambda' v' + \frac{1}{4} v'^2 - \frac{1 - e^\lambda}{r^2} \right\}, \quad (4)$$

$$T_3^3 = T_2^2, \quad (5)$$

$$8\pi T_4^4 = \frac{1}{4} e^{-\lambda} \left\{ v'' - \frac{1}{2} \lambda' v' + \frac{1}{2} v'^2 + \frac{2(\lambda' + v')}{r} - \frac{2(1 - e^\lambda)}{r^2} \right\} \quad (6)$$

an.

2. *Leeres Feld.* In einem masse- und energiefreien Felde setzen wir

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = T_4^4 = 0.$$

Aus (3) und (6) erhalten wir

$$\lambda' + v' = 0$$

oder

$$\lambda = -v,$$

abgesehen von einer Konstanten. Dann liefert Gleichung (10)

$$-\frac{1}{2} e^v \left\{ \frac{1}{2} v'' + \frac{1}{2} v'^2 - \frac{1 - e^{-v}}{r^2} \right\} = 0,$$

oder

$$e^v (v'' + v'^2) - \frac{2(1 - e^v)}{r^2} = 0;$$

daraus folgt:

$$1 - e^v = Ar^2 + \frac{B}{r},$$

wo A und B Integrationskonstanten sind. Daher gilt

$$e^v = e^{-\lambda} = 1 - Ar^2 - B/r. \quad (7)$$

Wenn im Ursprung keine Singularität auftritt, müssen wir $B = 0$ setzen und erhalten die Lösung

$$e^{\nu} = e^{-\lambda} = 1 - Ar^2. \quad (8)$$

3. *Feld eines Materieteilchens.* Befindet sich im Ursprung ein Teilchen der Masse m , so können wir in (7) $B = 2m$ setzen und erhalten die der de Sitterschen Welt entsprechende Schwarzschildsche Lösung, nämlich

$$e^{\nu} = e^{-\lambda} = 1 - Ar^2 - 2m/r. \quad (9)$$

4. *Feld eines Elektrons.* Es hat sich gezeigt¹⁾, daß, wenn T_{pq} den elektromagnetischen Energietensor darstellt, die Lösung der Gleichungen (3) bis (6) durch

$$e^{\nu} = e^{-\lambda} = 1 - Ar^2 - \frac{2m}{r} + \frac{4\pi\epsilon^2}{r^2} \quad (10)$$

gegeben ist; das ist die Lösung von Nordström und Jeffery für das Feld eines in der de Sitterschen Welt gelegenen Elektrons.

5. Tatsächlich bringen in jedem Felde mit $g^{pq}T_{pq} = 0$ und $T_1^1 = T_4^4$ die radialsymmetrischen Lösungen der Gleichungen

$$K_{pq} - \frac{1}{4}g_{pq}K = -8\pi T_{pq}$$

implizit die „kosmologische Konstante“ ($3A$) mit sich, und es ist nicht nötig, in die allgemeine Gleichung eine äußere Konstante einzuführen, wie de Sitter es getan hat. Dieser Umstand trägt stark zur (wenn auch nur formalen) Eleganz der Tensorgleichung bei; aber es ist schwierig, die gleiche Gleichungsform auf Felder im allgemeinen, die von irgendwelchen Massen oder Energien erfüllt sind, anzuwenden.

Calcutta, Presidency College, 14. Januar 1935.

¹⁾ J. Ghosh, Nature vom 29. Juli 1933; ZS. f. Phys. **85**, 511, 1933.